

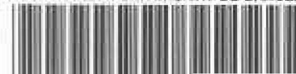
A. LICHNEROWICZ

ELEMENTOS DE CALCULO TENSORIAL

Traducción de
JULIO PORCEL MOLEON
Licenciado en Ciencias



AGUILAR





El presente volumen, incorporado a este fondo editorial con el asesoramiento de D. LUIS BRAVO GALA, *es la traducción española de la obra*

ELEMENTS DE CALCUL TENSORIEL

4e ÉDITION REVUE

publicada originalmente en lengua francesa por la Casa Librairie Armand Colin, de París.

TERCERA EDICION, 1968

Depósito Legal. M. 7054 - 1968.

AGUILAR, S. A. DE EDICIONES. Juan Bravo, 38, Madrid (España). 1968.

Printed in Spain. Impreso en España por S.A.I.L. (Sociedad Anónima Industrias del Libro) Carretera de Vicálvaro, 39, Madrid. 1968.

PREFACIO

PREFACIO

En el año 1900, en una memoria que se ha hecho célebre, Ricci y Levi Civita publicaron la primera exposición sistemática referente al cálculo tensorial, llamando la atención de matemáticos y físicos sobre cierto número de sus posibles aplicaciones. A partir de entonces el camino recorrido ha sido largo. La aparición de la teoría de la relatividad, que solo ha sido posible gracias a la existencia previa del cálculo tensorial, le ha hecho a su vez experimentar enormes progresos. De este modo, estas técnicas de cálculo se han transformado en uno de los instrumentos más poderosos de toda la física teórica moderna. Recientemente, se han utilizado incluso en el estudio de problemas técnicos tales como el de la interconexión de máquinas eléctricas. Cabe decir que el cálculo tensorial deberá formar parte en lo sucesivo de toda cultura matemática o física.

Este pequeño tratado se ha dividido en dos partes: una relativa al álgebra y al análisis tensorial, y la otra, a sus aplicaciones más importantes. En la primera de ellas, el álgebra tensorial ha sido completada con algunas páginas especialmente consagradas al álgebra exterior, cuyo conocimiento es de particular interés para los físicos. Se han eludido, por el contrario, conceptos como el de densidad tensorial y el de capacidad tensorial, cuyo interés matemático actual parece muy limitado. La noción de tensor adjunto de un tensor antisimétrico permite, por otra parte, suplir suficientemente tal omisión.

En lo que concierne al análisis tensorial, nos hemos limitado intencionadamente a exponer el análisis de los campos de tensores en un espacio de Riemann, por ser la geometría riemanniana la que presenta mayor interés desde el punto de vista de las aplicaciones. Se ha adoptado de manera sistemática el método del sistema móvil de referencia, *de Elie Cartan, que, siendo el más geométrico e intuitivo, ofrece además la ventaja de permitir al lector abordar sin gran esfuerzo el estudio de otras geometrías generalizadas.*

En la parte dedicada a las aplicaciones ha sido necesario, naturalmente, efectuar una selección. Un primer capítulo está destinado a poner de manifiesto cómo la geometría de los espacios de Riemann se hace intuitiva en cuanto se pone en contacto con la dinámica analítica clásica, y la ayuda que es capaz de aportar a esta. En particular, hemos dedicado una introducción al estudio de los medios continuos y a la elasticidad. El lector deseoso de profundizar en estas materias puede consultar los trabajos de Léon Brillouin.

Otros dos capítulos están consagrados al estudio de las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo y a la teoría de la relatividad. En lo que respecta a la teoría relativista de la gravitación, de la que solo ha sido posible esbozar sus principios, el lector podrá consultar el interesante trabajo de Georges Darmois.

Como autor, me sentiré satisfecho de haber cumplido mi propósito si he facilitado a los estudiantes los medios de abordar el estudio de las grandes teorías de la física contemporánea.

INDICE



INDICE

PARTE II

APLICACIONES

PARTE PRIMERA

CALCULO TENSORIAL

CAPITULO 1

LOS ESPACIOS VECTORIALES

NOCION DE ESPACIO VECTORIAL

1-1. Definición de un espacio vectorial.—Consideremos, en el espacio ordinario de la geometría clásica de tres dimensiones, el conjunto de los vectores libres del espacio.

1.° A cada pareja de estos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, la adición vectorial hace corresponder un tercer vector $\vec{x} + \vec{y}$, llamado suma, el cual goza de las propiedades siguientes:

a) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (ley conmutativa);

b) $\vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z}$ (ey asociativa);

c) existe un vector nulo, designado con $\vec{0}$, tal que

$$\vec{x} + \vec{0} = \vec{x};$$

d) a todo vector $\vec{x}$ se le puede hacer corresponder un vector $(-\vec{x})$, denominado opuesto del $\vec{x}$, tal que

$$\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}.$$

2.º A un vector $\vec{x}$ y a un número real α, la multiplicación por un escalar hace corresponder un nuevo vector designado con $\alpha\vec{x}$, que se llama producto de $\vec{x}$ por el número α. La multiplicación por un escalar goza de las propiedades siguientes:

a') $1\vec{x} = \vec{x}$;

b') $\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$ (ley asociativa);

c') $(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x}$ (ley distributiva para la adición de escalares);

d') $\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y}$ (ley distributiva para la adición de vectores).

De una manera general, consideremos un conjunto E de elementos cualesquiera $\vec{x}$, $\vec{y}$, etc., y supongamos que existen dos leyes de composición tales que:

1.º A todo par $\vec{x}$, $\vec{y}$, la primera ley hace corresponder un elemento $\vec{x} + \vec{y}$, que goza de las propiedades *a*), *b*), *c*) y *d*).

2.º A todo elemento $\vec{x}$ y a todo número real α, la segunda ley hace corresponder un elemento $\alpha\vec{x}$, el cual goza de las propiedades *a'*), *b'*), *c'*) y *d'*).

Diremos en tal caso que E *es un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales y que los elementos* $\vec{x}$, $\vec{y}$, *etc. son vectores de ese espacio.* Si la segunda ley está definida para todo número complejo α, diremos que E es un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números complejos. Salvo aviso en contrario, en este libro nos limitaremos a considerar los espacios vectoriales respecto al cuerpo de los números reales.

1-2. Ejemplos de espacios vectoriales.—Además del caso familiar de donde toman su nombre, es fácil construir otros ejemplos sencillos de espacios vectoriales.

a) Consideremos el conjunto de los números complejos $a + bi$, siendo a y b reales. La adición de los números complejos $a + bi$ y $c + di$ y también la multiplicación de un número complejo $a + bi$ por un número real α gozan evidentemente de las propiedades enunciadas en la sección 1-1, y, por consiguiente, el cuerpo de los números complejos constituye un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales. Esta es la razón que ha conducido a introducir una representación de los números complejos mediante vectores en el plano.

b) Sea $\vec{X}$ un conjunto de n números reales considerados en cierto orden,

$$\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

y sea E el conjunto de todas las expresiones $\vec{X}$.

Adoptemos ahora las dos leyes de composición siguientes:

Si $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $\vec{Y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$, se tiene:

$$\vec{X} + \vec{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n).$$

Si $\vec{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ y α es un número real cualquiera,

$$\alpha\vec{X} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

El lector puede comprobar que estas dos leyes gozan de las propiedades enunciadas en la sección 1-1; de ello resulta que el conjunto E, con estas dos leyes de composición, constituye un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales.

c) Consideremos el conjunto de todas las funciones reales f de una variable real definidas en el intervalo (0,1), y adoptemos como leyes de composición las leyes habituales que dan la suma de dos funciones y el producto de una función f por una constante α. Con estas leyes de composición, el conjunto considerado es un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales.

Estos ejemplos ponen de manifiesto el interés y la extensión del concepto de espacio vectorial.

1-3. Propiedades elementales de los espacios vectoriales.

1-3. Propiedades elementales de los espacios vectoriales.—1.ª Dados dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, existe un vector único $\vec{z}$ tal que

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}. \qquad [1\text{-}1]$$

En efecto, basta sumar a los dos miembros de [1-1] el vector $(-\vec{y})$ para obtener la relación

$$\vec{z} = \vec{x} + (-\vec{y}),$$

que define perfectamente al vector $\vec{z}$. Este vector se llama diferencia de $\vec{x}$ e $\vec{y}$. De la misma manera que en el cálculo con escalares, escribiremos:

$$\vec{x} + (-\vec{y}) = \vec{x} - \vec{y}.$$

Con esta notación cabe expresar la propiedad *c'*) de la sección 1-1 en la forma

$$(\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}. \qquad [1\text{-}2]$$

En efecto, en virtud de esta propiedad, resulta que

$$(\alpha - \beta)\vec{x} + \beta\vec{x} = (\alpha - \beta + \beta)\vec{x} = (\alpha + 0)\vec{x} = \alpha\vec{x}.$$

Haciendo $\beta = \alpha$ en [1-2], se deduce inmediatamente la relación

$$0\vec{x} = \vec{0}; \qquad [1\text{-}3]$$

y si se hace ahora $\alpha = 0$,

$$(-\beta)\vec{x} = -\beta\vec{x}.$$

En particular, se tiene que

$$(-1)\vec{x} = -\vec{x}. \qquad [1\text{-}4]$$

2.ª De la relación [1-4] resulta que la propiedad d') de la sección 1-1 se puede poner en la forma

$$\alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y}, \qquad [1\text{-}5]$$

y haciendo en esta $\vec{x} = \vec{y}$, se tiene

$$\alpha\vec{0} = \vec{0}. \qquad [1\text{-}6]$$

3.ª Recíprocamente, la relación

$$\alpha\vec{x} = \vec{0} \qquad [1\text{-}7]$$

supone que ha de ser $\alpha = 0$ ó $\vec{x} = 0$; en efecto, si α no es nulo, admitirá un inverso α^{-1} y multiplicando los dos miembros de [1-7] por él, se tiene:

$$\alpha^{-1}(\alpha\vec{x}) = \vec{0},$$

o bien

$$(\alpha^{-1}\alpha)\vec{x} = \vec{x} = \vec{0}.$$

1-4. Subespacio vectorial.—DEFINICIÓN: *Se llama subespacio vectorial de un espacio vectorial* E *a toda parte* V *de* E *tal que, cualesquiera que sean* $\vec{x}$ *e* $\vec{y}$ *pertenecientes a* V *y* α *real, los vectores* $\vec{x} + \vec{y}$ *y* $\alpha\vec{x}$ *pertenecen a* V.

Tomando $\alpha = 0$, es obvio que V contiene necesariamente al vector nulo. Con mayor generalidad, es fácil ver que las leyes de composición de E, aplicadas a los vectores de V, hacen que V sea un espacio vectorial: si $\vec{x}$ pertenece a V también pertenece a V el vector $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$. Por consiguiente, cualquier vector de V admite en V un vector opuesto, y las leyes de adición y de multiplicación por un escalar tienen las propiedades enunciadas en la sección 1-1. De esta forma vemos que V es también un espacio vectorial. No es difícil encontrar ejemplos de subespacios vectoriales.

a) El conjunto de los vectores libres coplanarios con dos vectores dados constituye un subespacio vectorial del espacio de los vectores libres de la geometría elemental.

b) Sea $\vec{x}$ un vector no nulo de un espacio vectorial E. El conjunto de los productos $\alpha\vec{x}$, en donde α es un número real cualquiera, constituye un subespacio vectorial de E. En efecto:

$$\alpha\vec{x} + \beta\vec{x} = (\alpha + \beta)\vec{x}; \quad \beta(\alpha\vec{x}) = (\beta\alpha)\vec{x}.$$

c) Las funciones reales de una variable real, definidas en el intervalo (0,1), forman un espacio vectorial respecto al cuerpo de los números reales. Las funciones acotadas de una variable real, definidas en las mismas condiciones, forman un subespacio vectorial del anterior, puesto que la suma de dos funciones acotadas y el producto de una función acotada por una constante son funciones acotadas.

LOS ESPACIOS VECTORIALES DE n DIMENSIONES

1-5. Base de un espacio vectorial.—En un espacio vectorial E consideremos p vectores no nulos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p$; diremos que dichos vectores forman un sistema *linealmente independiente* de orden p cuando sea imposible encontrar p números $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, no todos nulos, tales que

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_p\vec{x}_p = \vec{0}.$$

En caso contrario, el sistema de los p vectores dados se dice que es *linealmente dependiente*. Para abreviar, se emplean las denominaciones de *sistema libre* y de *sistema ligado* para designar los sistemas linealmente independientes o dependientes, respectivamente [1].

Consideremos en el espacio vectorial E el conjunto formado por todos los sistemas libres de vectores. Pueden presentarse dos casos:

a) o bien existen sistemas de vectores libres de orden arbitrariamente grande;

b) o el orden de los sistemas libres está acotado.

En el segundo caso, se dice que el espacio vectorial E admite un número finito de dimensiones, denominación que explicaremos a continuación; en el resto de este libro solo nos ocuparemos de *espacios vectoriales que admiten un número finito de dimensiones.*

En estas condiciones cabe encontrar un entero n tal que existan sistemas libres de orden n y que no sea posible encontrar sistemas libres de orden $n + 1$. Sea $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ un sistema libre de orden n, al cual se le da el nombre de *base* de E; daremos la siguiente definición:

[1] No deben confundirse estas denominaciones con las de *vector libre* y *vector ligado* empleadas en el cálculo vectorial elemental.

DEFINICIÓN.—*Se llama base de un espacio vectorial E a todo sistema libre de vectores de orden máximo.*

Designemos por $\vec{x}$ un vector cualquiera de E; el sistema de los $n + 1$ vectores $(\vec{x}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ es necesariamente ligado y existen $n + 1$ números $\lambda, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$\lambda\vec{x} + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}, \quad [1\text{-}8]$$

en donde λ es diferente de cero, pues en otro caso el sistema de los $\vec{e}_i$ no sería libre. Se puede entonces resolver [1-8] respecto a $\vec{x}$, por lo que existirán n números $x^1, x^2, \ldots, x^n$ tales que

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n. \quad [1\text{-}9]$$

Diremos que el vector $\vec{x}$ es una combinación lineal de los $\vec{e}_i$. Además, esta combinación es única, porque si hubiese otra, por diferencia se obtendría una combinación lineal de los $\vec{e}_i$ con coeficientes no todos nulos, la cual representaría al vec-

tor nulo, y el sistema de los $\vec{e}_i$ no sería libre. Podemos así enunciar el siguiente teorema:

TEOREMA.—*Dada una base del espacio* E, *todo vector* $\vec{x}$ *de este espacio se puede expresar de manera única mediante una combinación lineal de los vectores de la base.*

Los números $(x^1, x^2, ..., x^n)$ que figuran en [1-9] se llaman *componentes* de $\vec{x}$ respecto de la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$.

Es fácil demostrar que la propiedad de las bases enunciada en el teorema precedente caracteriza a estas entre todos los sistemas posibles de vectores. Sea $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ un sistema de p vectores tal que todo vector $\vec{x}$ de E pueda expresarse de manera única en la forma

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + ... + x^p\vec{e}_p. \qquad [1\text{-}10]$$

Como quiera que el vector nulo $\vec{0}$ no puede expresarse más que de una sola forma ($x^1 = x^2 = ... = x^p = 0$) mediante una combinación lineal de vectores del sistema, resulta necesariamente que tal sistema es libre y, por consiguiente, que $p \leqslant n$.

Es inmediato ver que de esa propiedad gozan también todos los sistemas libres de orden p, pues si $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, ..., \vec{\varepsilon}_p)$ es uno de tales sistemas, el vector $\vec{\varepsilon}_1$ se podrá escribir:

$$\vec{\varepsilon}_1 = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ... + \alpha_p\vec{e}_p.$$

en donde cabe suponer, p. ej., que α_1 no es nulo. Se tendrá así

$$\vec{e}_1 = \beta_1\vec{\varepsilon}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + ... + \beta_p\vec{e}_p,$$

que sustituida en [1-10] nos dice que todo vector $\vec{x}$ de E puede expresarse por medio de una combinación lineal de $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_p)$ y, en particular,

$$\vec{\varepsilon}_2 = \gamma_1\vec{\varepsilon}_1 + \gamma_2\vec{e}_2 + ... + \gamma_p\vec{e}_p,$$

siendo diferente de cero uno al menos de los números $\gamma_2, ..., \gamma_p$; en caso contrario, el sistema de los $\vec{\varepsilon}_i$ no sería libre. Repitiendo el razonamiento, se ve que todo vector $\vec{x}$ de E puede escribirse en la forma

$$\vec{x} = \xi^1\vec{\varepsilon}_1 + \xi^2\vec{\varepsilon}_2 + ... + \xi^p\vec{\varepsilon}_p.$$

Inmediatamente se deduce la imposibilidad de que existan sistemas libres de orden $p + 1$ y, por consiguiente, que $p = n$. Enunciaremos, así, el teorema siguiente:

TEOREMA.—*Para que un sistema de vectores constituya una base de* E *es necesario y suficiente que todo vector de* E *pueda expresarse de manera única mediante una combinación lineal de los vectores del sistema.*

El número n se denomina *dimensión* del espacio vectorial E considerado, y en adelante designaremos con E_n cualquier espacio vectorial de n dimensiones.

1-6. Ejemplos.—*a*) En el espacio vectorial de los vectores libres de la geometría ordinaria, una base está formada por tres vectores arbitrarios no coplanarios. La dimensión del espacio es, pues, igual a 3.

b) Consideremos nuevamente el ejemplo *b*) estudiado en la sección 1-2 y sean los n vectores

$$\left\{\begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \\ \vec{e}_2 = (0, 1, \ldots, 0), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \vec{e}_n = (0, 0, \ldots, 1). \end{array}\right. \qquad [1\text{-}11]$$

Todo vector

$$\vec{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$$

puede expresarse de manera única mediante una combinación lineal de los $\vec{e}_i$:

$$\vec{x} = x^1\vec{e}_1 + x^2\vec{e}_2 + \ldots + x^n\vec{e}_n.$$

Por consiguiente, los vectores [1-11] constituyen una base del espacio que admite n dimensiones.

1-7. Subespacio vectorial de un E_n.—Sea V un subespacio vectorial de un E_n; es decir, otro espacio vectorial en el que todo sistema libre de vectores es un sistema libre de E_n. Resulta, pues, que V admite un número finito de dimensiones

$r \leqslant n$. Sea $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_r)$ una base de V, por lo que todo vector de V podrá expresarse de manera única en la forma

$$\xi^1\vec{\varepsilon}_1 + \xi^2\vec{\varepsilon}_2 + \ldots + \xi^r\vec{\varepsilon}_r. \qquad [1\text{-}12]$$

Además, y cualesquiera que sean los números $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r$, el vector [1-12] pertenece a V.

Recíprocamente, si $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_r)$ es un sistema libre de orden r de E_n, es obvio que, de acuerdo con la propia definición, el conjunto de todos los vectores expresables por medio de combinaciones lineales de los $\vec{\varepsilon}_i$ constituye un subespacio vectorial de E_n.

Todo subespacio vectorial de n dimensiones de E_n coincide con el propio E_n.

1-8. Subespacios vectoriales suplementarios.—Dado un sistema libre de vectores $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_r)$ de orden $r < n$, propongámonos completar este sistema adjuntándole $n - r$ nuevos vectores $(\vec{\eta}_{r+1}, \ldots, \vec{\eta}_n)$ tales que el sistema de los vectores $\vec{\varepsilon}_i$ y $\vec{\eta}_j$ constituya una base para E_n.

Ciertamente existe en E_n un vector al menos tal que el sistema obtenido adjuntándolo a los $\vec{\varepsilon}_i$ es libre, pues de lo contrario, el sistema de los $\vec{\varepsilon}_i$ sería ya una base de E_n.

Sea $\vec{\eta}_{r+1}$ este vector; el sistema $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_r, \vec{\eta}_{r+1})$ es también libre de orden $r+1$, y repitiendo el proceso se obtienen sistemas libres de orden creciente hasta llegar exactamente al número n de dimensiones del espacio E_n. Se tiene así:

TEOREMA.—*Dado un sistema libre de orden* r, *siempre es posible completar dicho sistema mediante* n — r *nuevos vectores, con lo que se obtiene una base de* E_n.

Sea U_r un subespacio vectorial de $r < n$ dimensiones de E_n y $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \ldots, \vec{\varepsilon}_r)$ una base arbitraria de U_r. En virtud del teorema precedente se podrán encontrar (de infinitas maneras) $n - r$ vectores $(\vec{\eta}_{r+1}, \ldots, \vec{\eta}_n)$ tales que los $\vec{\varepsilon}_i$ y los $\vec{\eta}_j$ definan una base de E_n. Designemos con V_{n-r} el subespacio vectorial engendrado por los $\vec{\eta}_j$.

Los dos subespacios U_r y V_{n-r} no tienen más vector común que el vector nulo, como se comprueba inmediatamente. Por otra parte, todo vector $\vec{x}$ de E_n que se escribe

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{\varepsilon}_i + \sum_{j=r+1}^{j=n} \beta_j \vec{\eta}_j$$

se puede descomponer en una suma,

$$\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$$

de un vector $\vec{y}$ de U_r y de un vector $\vec{z}$ de V_{n-r}. De acuerdo con las consideraciones precedentes, esta descomposición es única. En tal caso, se dice que los dos subespacios vectoriales U_r y V_{n-r} son *suplementarios* uno del otro.

TEOREMA.—*Todo subespacio vectorial* U_r *de* E_n *admite subespacios suplementarios.*

1-9. Cambio de base.—Del teorema dado en 1-8 resulta que un espacio vectorial E_n admite una infinidad de bases. Nos proponemos ahora encontrar las relaciones existentes entre las componentes de un mismo vector $\vec{x}$ de E_n respecto a dos bases distintas.

Sean $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ y $(\vec{e}_{1'}, \vec{e}_{2'}, \ldots, \vec{e}_{n'})$ dos bases arbitrarias de E_n. Expresando los vectores de cada una de estas bases mediante la otra, se tiene:

$$\vec{e}_{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^i_{j'} \vec{e}_i; \qquad \vec{e}_i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^{j'}_i \vec{e}_{j'}. \qquad [1\text{-}13]$$

Sea $\vec{x}$ un vector cualquiera de E_n de componentes x^i respecto a la base $(\vec{e}_i)$ y $x^{j'}$ respecto a la $(\vec{e}_{j'})$; es decir,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x^i \vec{e}_i = \sum_{j'=1}^{j'=n} x^{j'} \vec{e}_{j'} = \sum x^{j'} A^i_{j'} \vec{e}_i. \qquad [1\text{-}14]$$

Identificando los coeficientes del segundo y tercer miembros de [1-14] relativos a $\vec{e}_i$, se obtienen las fórmulas de transformación:

$$x^i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^i_{j'} x^{j'}. \qquad [1\text{-}15]$$

Si se invierte el papel asignado a cada base en el razonamiento anterior, es posible escribir también que

$$x^{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^{j'}_i x^i. \qquad [1\text{-}16]$$

DUALIDAD

1-10. Formas lineales.—Designemos por E_n un espacio vectorial de n dimensiones, y supongamos que a todo vector $\vec{x}$ de E_n se le hace corresponder un número $F(\vec{x})$, siendo esta ley de correspondencia tal que, cualesquiera que sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de E_n y α real, se verifiquen las relaciones

$$F(\vec{x} + \vec{y}) = F(\vec{x}) + F(\vec{y}) \qquad [1\text{-}17]$$

$$F(\alpha\vec{x}) = \alpha F(\vec{x}) \qquad [1\text{-}18]$$

Diremos que $F(\vec{x})$ *es una forma lineal definida sobre* E_n, y también que [1-17] y [1-18] son las relaciones características de dicha forma.

Mediante [1-17] y [1-18] es fácil obtener una expresión de $F(\vec{x})$ a partir de las componentes del vector $\vec{x}$ en una base $(\vec{e}_i)$; en efecto, si

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x^i \vec{e}_i$$

designa un vector arbitrario de E_n, utilizando sucesivamente [1-17] y [1-18] se tiene:

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} x^i F(\vec{e}_i), \qquad [1\text{-}19]$$

en donde las $F(\vec{e}_i)$ son independientes del vector $\vec{x}$; es decir,

$$F(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} a_i x^i \qquad [a_i = F(\vec{e}_i)].$$

1-11. El espacio dual.—Consideremos el conjunto de todas las formas lineales definidas sobre E_n, a las cuales designaremos en adelante por y^*, z^*, etc., y adoptemos para este conjunto las dos leyes de composición siguientes:

1.ª Si $y^*(\vec{x}) = \Sigma y^*_i x^i$ y $z^*(\vec{x}) = \Sigma z^*_i x^i$ designan dos formas lineales cualesquiera, se tiene:

$$y^*(\vec{x}) + z^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} (y^*_i + z^*_i) x^i.$$

2.ª Si α designa un número real arbitrario:

$$\alpha y^*(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} (\alpha y_i^*) x^i.$$

Es claro que estas dos leyes de composición satisfacen las hipótesis enunciadas en la sección 1-1 y, por consiguiente, el conjunto de todas las formas lineales definidas sobre E_n constituye un espacio vectorial. Por otra parte, toda forma lineal puede expresarse de manera única como combinación lineal de las n formas $(x^1, x^2, ..., x^n)$. El sistema de estas n formas constituye, pues, una base del espacio vectorial considerado, el cual admite n dimensiones.

El espacio vectorial de formas lineales se designa con el nombre de espacio vectorial dual de E_n, y se representa por la notación E_n^*.

Las formas lineales definidas sobre E_n constituyen un espacio vectorial E_n^*, y es inmediato definir en él los sistemas libres de formas y los sistemas ligados.

1-12. Base dual.—A toda base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n)$ de E_n hemos hecho corresponder de manera canónica una base $(x^1, x^2, ..., x^n)$ de E_n^*, que *llamaremos base dual respecto de la* $(\vec{e}_i)$. Si se efectúa en E_n el cambio de base

$$\vec{e}_{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^i_{j'} \vec{e}_i; \qquad \vec{e}_i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^{j'}_i \vec{e}_{j'}, \qquad [1\text{-}20]$$

queda realizado simultáneamente sobre E_n^* el cambio de base definido por las fórmulas [1-15] y [1-16], o sea,

$$x^i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^i_{j'} x^{j'}; \qquad x^{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^{j'}_i x^i. \qquad [1\text{-}21]$$

En este cambio de base, las componentes y_i^* de la forma $y^*(\vec{x})$ se transforman según las fórmulas:

$$y^*_{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^i_{j'} y^*_i; \qquad y^*_i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^{j'}_i y^*_{j'}. \qquad [1\text{-}22]$$

Es evidente que toda base de E_n^* puede considerarse como la base dual de una base de E_n. Designemos, en efecto, por $(y^{*1'}, y^{*2'}, ..., y^{*n'})$ una base arbitraria de E_n^*. Si referimos ahora las formas $(x^1, x^2, ..., x^n)$ a esta base, tendremos:

$$x^i = \sum_{j'=1}^{j'=n} A^i_{j'} y^{*j'}.$$

El sistema de los n vectores $\vec{e}_{j'}$, definidos por

$$\vec{e}_{j'} = \sum_{i=1}^{i=n} A^i_{j'} e_i$$

es libre y, por consiguiente, constituye una base de E_n; su base dual en E_n^* será $(y^{*1'}, y^{*2'}, ..., y^{*n'})$.

1-13. Bidualidad.—Consideremos los espacios vectoriales E_n y E_n^* referidos a las bases duales $(\vec{e}_i)$ e $(y^{*i} = x^i)$ y estudiemos el espacio dual de E_n^*, que designaremos por E_n^{**}. Sean (z_i^{**}) los elementos de la base de E_n^{**}, dual de la base (y^{*i}) de E_n^*. Si se efectúa sobre las bases $(\vec{e}_i)$, (y^{*i}) y (z_i^{**}), duales entre sí, un cambio de base, de las fórmulas [1-20] y [1-21] resulta que las $\vec{e}_i$ y las z_i^{**} se transforman según la misma ley; por consiguiente, si a todo vector $\vec{x}$ de E_n,

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} x^i \vec{e}_i, \qquad [1\text{-}23]$$

se le hace corresponder el elemento z^{**} de E_n^{**} con idénticas componentes,

$$z^{**} = \sum_{i=1}^{i=n} x^i z_i^{**}. \qquad [1\text{-}24]$$

y recíprocamente, esta correspondencia es *independiente de la elección de bases*. La correspondencia es tal que hace corresponder al vector $\vec{x}$ de E_n, la forma lineal en y^*, $y^*(\vec{x})$, que es un elemento de E_n^{**}, y es evidentemente *lineal*, en el sentido de que la adición y la multiplicación por un escalar permanecen invariantes; es decir, a la suma de dos elementos de E_n corresponde la suma de los dos elementos homólogos de E_n^{**}, y al producto por α de un elemento de E_n le corresponde el producto por α del elemento homólogo.

Como carece de interés caracterizar a los elementos de E_n^{**}, *convendremos en adelante en identificar los espacios vectoriales* E_n *y* E_n^{**}, *considerando como idénticos los elementos* $\vec{x}$ *y* z^{**} *que se corresponden en virtud de las fórmulas* [1-23] *y* [1-24]. En particular, la base (z_i^{**}) es idéntica a la base $(\vec{e}_i)$, de suerte que el concepto de base dual aparece como recíproco.

EL ESPACIO VECTORIAL EUCLIDIANO

1-14. El convenio de Einstein.—Se observa que en todas las fórmulas escritas hasta ahora la sumación se refiere a un índice repetido dos veces, y que figura una vez como índice superior y otra como índice inferior en cada fórmula. Para abreviar la escritura, Einstein propuso suprimir el signo Σ y hacer el convenio siguiente:

CONVENIO DE EINSTEIN.—*Siempre que en un monomio figure dos veces el mismo índice, una vez como superior y otra como inferior, se debe, salvo aviso en contrario, sumar los monomios obtenidos dando a este índice todos los valores posibles.*

Con este convenio, las fórmulas [1-15] y [1-16] toman la forma:

$$x^i = A^i_{i'} x^{i'}; \qquad x^{i'} = A^{i'}_i x^i, \qquad [1\text{-}25]$$

mientras que las fórmulas [1-22] se escriben:

$$y_{i'}^{*} = A_{i'}^{i} y_{i}^{*}; \qquad y_{i}^{*} = A_{i}^{j'} y_{j'}^{*}. \qquad [1\text{-}26]$$

El lector se convencerá fácilmente de que, lejos de hacer más difíciles de seguir los razonamientos, tal convenio, cuando se está habituado, facilita extraordinariamente la lectura e interpretación de las fórmulas del cálculo tensorial.

1-15. Concepto de espacio vectorial euclidiano.— Consideremos primero el espacio vectorial de los vectores libres de la geometría ordinaria. A todo par de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$, la multiplicación escalar hace corresponder un número, designado por $\vec{x} \cdot \vec{y}$, y llamado su producto escalar, que goza de las propiedades siguientes:

a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (ley conmutativa);

b) $(\alpha\vec{x}) \cdot \vec{y} = \vec{x} \cdot (\alpha\vec{y}) = \alpha(\vec{x} \cdot \vec{y})$
(ley asociativa respecto a la multiplicación por un escalar α);

c) $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$
(ley distributiva respecto a la adición vectorial);

d) Si es $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ para cualquier valor de $\vec{x}$, se tiene que $\vec{y} = 0$.

De manera más general, consideremos un espacio vectorial E_n, definido sobre el cuerpo de los

números reales, y supongamos que existe una ley de composición tal que a todo par de vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ hace corresponder un número real $\vec{x} \cdot \vec{y}$ que goza de las propiedades *a*), *b*), *c*) y *d*).

Convendremos en decir en tal caso que el espacio vectorial E_n *es un espacio vectorial euclidiano, y que la ley de composición* $\vec{x} \cdot \vec{y}$ *es la multiplicación escalar en dicho espacio.*

De las condiciones *a*), *b*) y *c*) resulta que el producto escalar de dos vectores es una forma bilineal respecto a las componentes de estos vectores; es decir, una forma lineal respecto a cada uno de los vectores. De la condición de conmutatividad, resulta que tal forma bilineal es simétrica respecto a ambos vectores, y nos proponemos hallar una expresión analítica de dicho producto.

Supongamos el espacio euclidiano E_n referido a una base cualquiera $(\vec{e}_i)$, y sean

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i, \qquad \vec{y} = y^j \vec{e}_j,$$

dos vectores arbitrarios de E_n. Efectuando el producto escalar de los segundos miembros, y teniendo en cuenta las propiedades *b*) y *c*), se tiene:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^i y^j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j,$$

donde aparecen los productos escalares de cada par de vectores de la base. En adelante utilizaremos la notación

$$g_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j. \qquad [1\text{-}27]$$

En virtud de la propiedad conmutativa del producto escalar, los símbolos g_{ij} son simétricos respecto a sus dos índices:

$$g_{ij} = g_{ji};$$

con estas notaciones se tiene:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij}x^i y^j.$$

Veamos ahora cómo se traduce la condición *d*): si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$ para cualquier $\vec{x}$, se tiene, cualesquiera que sean las x^i,

$$g_{ij}x^i y^j = 0,$$

de lo cual se deduce que el sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas

$$g_{ij}y^j = 0$$

no admite más solución que la singular, de donde resulta que

$$\text{determinante } \| g_{ij} \| \neq 0.$$

En estas circunstancias, diremos que la forma bilineal $g_{ij}x^i y^j$ es no degenerada; resulta así la siguiente proposición:

TEOREMA.—*El producto escalar de dos vectores del espacio euclidiano está dado por la forma bilineal simétrica no degenerada*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij}x^i y^j, \qquad [1\text{-}28]$$

en donde las g_{ij} designan los productos escalares dos a dos de los vectores de la base.

Es evidente que todo subespacio vectorial de un espacio euclidiano es también un espacio euclidiano.

1-16. Ortogonalidad y norma.—Sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores cuyo producto escalar es nulo. En el caso particular en que el espacio vectorial euclidiano considerado es el espacio de los vectores libres de la geometría ordinaria, los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ tienen direcciones perpendiculares, a menos que uno de ellos sea nulo. Resumiremos esto diciendo en los diferentes casos que los vectores son ortogonales. *En el caso general de un espacio euclidiano de n dimensiones, diremos también que $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales cuando*

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0. \qquad [1\text{-}29]$$

Se llama norma del vector $\vec{x}$, o también cuadrado de este vector, al producto escalar de dicho vector $\vec{x}$ por sí mismo, y escribiremos:

$$N\vec{x} = (\vec{x})^2 = g_{ij}x^i x^j. \qquad [1\text{-}30]$$

Así que la norma de un vector $\vec{x}$ del espacio euclidiano se expresa mediante la forma cuadrática [1-30] en función de las componentes del vector. Se llamará *unitario* o *normalizado* todo vector cuya norma sea igual a 1.

En el espacio de los vectores libres de la geometría ordinaria, la norma de un vector (o cuadrado de este vector) es esencialmente positiva y solo se anula en el caso de que el vector sea nulo. No ocurre lo mismo si los coeficientes g_{ij} de la forma cuadrática [1-30] son cualesquiera, por lo que daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN.—*Un espacio vectorial se llama propiamente euclidiano si es euclidiano y si, además, la norma de todo vector no nulo es estrictamente positiva.*

Para que la cantidad [1-30] sea estrictamente positiva para todo vector no nulo, es necesario y suficiente que la forma cuadrática $g_{ij}x^ix^j$ sea *definida positiva*. En un espacio propiamente euclidiano, la forma en cuestión es siempre definida positiva para cualquier base $(\vec{e}_i)$ que se considere.

1-17. Desigualdad de Schwarz y sus aplicaciones.—Consideremos un espacio *propiamente euclidiano* P_n. La norma $N\vec{x}$ es siempre positiva o nula, y su raíz cuadrada se denomina *módulo* del vector $\vec{x}$; esto es:

$$\sqrt{N\vec{x}} = \text{mód. } \vec{x}.$$

Entre el módulo del producto escalar de dos vectores de P_n y los módulos de dichos vectores se verifica la desigualdad fundamental:

$$\text{mód. } (\vec{x} \cdot \vec{y}) \leqslant (\text{mód. } \vec{x})\ (\text{mód. } \vec{y}), \qquad [1\text{-}31]$$

conocida con el nombre de *desigualdad de Schwarz.*

Para establecer esta desigualdad, partamos del vector $\lambda\vec{x} + \vec{y}$, en donde λ designa un número real arbitrario, y formemos su norma:

$$(\lambda\vec{x} + \vec{y})^2 = \lambda^2\vec{x}^2 + 2\lambda\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y}^2. \qquad [1\text{-}32]$$

El primer miembro es esencialmente positivo o nulo; por tanto, el discriminante del trinomio en λ que figura en el segundo miembro sólo puede ser negativo o nulo. De aquí resulta la desigualdad

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \leqslant \vec{x}^2 \cdot \vec{y}^2,$$

que es equivalente a [1-31].

De [1-31] se deduce fácilmente una desigualdad relativa al módulo de una suma de vectores. Hagamos $\lambda = 1$ en la ecuación [1-32]:

$$(\vec{x} + \vec{y})^2 = \vec{x}^2 + 2\vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{y}^2.$$

Si mayoramos el valor absoluto del producto $\vec{x} \cdot \vec{y}$ utilizando la desigualdad de Schwarz, se tiene:

$$(\vec{x} + \vec{y})^2 \leqslant (\text{mód. } \vec{x})^2 + 2 \text{ mód. } \vec{x} \cdot \text{mód. } \vec{y} + (\text{mód. } \vec{y})^2$$
$$= (\text{mód. } \vec{x} + \text{mód. } \vec{y})^2,$$

de donde se deduce que

$$\text{mód. } (\vec{x} + \vec{y}) \leqslant \text{mód. } \vec{x} + \text{mód. } \vec{y}. \qquad [1\text{-}33]$$

La desigualdad de Schwarz permite también definir el *ángulo de dos vectores* de P_n. En el espa-

cio de los vectores libres de la geometría ordinaria, el ángulo φ de dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ está ligado a su producto escalar por medio de la relación:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\text{mód. } \vec{x})\,(\text{mód. } \vec{y}) \cos \varphi;$$

de donde,

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{(\text{mód. } \vec{x})\,(\text{mód. } \vec{y})}$$

Volviendo al espacio P_n, sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores (no nulos) del mismo. De la desigualdad de Schwarz se deduce:

$$\left| \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{(\text{mod. } \vec{x})\,(\text{mod. } \vec{y})} \right| \leqslant 1,$$

de donde resulta la existencia de un ángulo φ único, comprendido entre 0 y π, y tal que

$$\cos \varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{(\text{mód. } \vec{x})\,(\text{mód. } \vec{y})} \qquad [1\text{-}34]$$

Este ángulo φ será, por definición, el ángulo de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de P_n. Si los dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ están definidos por sus componentes, en virtud de [1-28] y [1-30] se tiene:

$$\cos \varphi = \frac{g_{ij}x^i y^j}{\sqrt{g_{ij}x^i x^j}\,\sqrt{g_{ij}y^i y^j}} \qquad [1\text{-}35]$$

1-18. Sistemas ortonormales de vectores.—Consideremos de nuevo un espacio vectorial P_n propiamente euclidiano de n dimensiones. Un sistema de r vectores de P_n se dirá ortogonal y normalizado o, más brevemente, *ortonormal*, si los vectores que lo componen están normalizados y son ortogonales dos a dos. Si son $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r)$ los vectores del sistema, se tiene:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, r), \qquad [1\text{-}36]$$

en donde se ha puesto

$$\begin{cases} \delta_{ij} = 0 & \text{si} \quad i \neq j, \\ \delta_{ij} = 1 & \text{si} \quad i = j. \end{cases}$$

Es claro que *todo sistema ortonormal de vectores es necesariamente libre;* de lo contrario existiría una relación de la forma

$$\sum_{i=1}^{i=r} \alpha_i \vec{e}_i = 0, \qquad [1\text{-}37]$$

con las α_i no todas nulas. Supongamos, p. ej., α_1 distinta de cero. Multiplicando escalarmente los dos miembros de [1-37] por $\vec{e}_1$, y teniendo presente [1-36], se deduce que

$$\alpha_1 = 0,$$

lo que contradice la hipótesis hecha.

Resulta de aquí que el número r de vectores de un sistema ortonormal es inferior o igual al número n de dimensiones del espacio. Cuando $r = n$, el

sistema ortonormal considerado constituye *una base ortonormal* de P_n.

1-19. Método de ortonormalización de Schmidt.— Surge la cuestión de si, dado un entero arbitrario $r \leqslant n$, existirán o no sistemas ortonormales constituidos por r vectores. Vamos a probar la existencia efectiva de tales sistemas mediante un método debido a E. Schmidt.

Sea $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ un sistema libre de orden r de P_n, y sea U_r el correspondiente subespacio vectorial. Es posible referir U_r a un sistema ortonormal de vectores; es decir, construir un sistema ortonormal cuyos vectores sean combinaciones lineales de los vectores $\vec{x}_i$. Con este propósito formemos la sucesión de vectores $\vec{y}_i$ definidos por:

$$\begin{cases} \vec{y}_1 = \vec{x}_1 \\ \vec{y}_2 = \lambda_2^1 \vec{y}_1 + \vec{x}_2 \\ \vec{y}_3 = \lambda_3^1 \vec{y}_1 + \lambda_3^2 \vec{y}_2 + \vec{x}_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{y}_r = \lambda_r^1 \vec{y}_1 + \lambda_r^2 \vec{y}_2 + \ldots + \lambda_r^{(r-1)} \vec{y}_{r-1} + \vec{x}_r, \end{cases}$$

en donde las λ_i^j designan coeficientes, que nos proponemos determinar de manera que cada vector $\vec{y}_i$ sea ortogonal a todos los $\vec{y}_j$ anteriores. De la relación

$$\vec{y}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$$

se deduce:

$$\lambda_2^1 \vec{y}_1^{\,2} + \vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0 \qquad \text{con} \qquad \vec{y}_1^{\,2} \neq 0.$$

Habiendo determinado así λ_2^1, obtenemos $\vec{y}_2$ ortogonal a $\vec{y}_1$ y no nulo, puesto que el sistema $(\vec{y}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ es libre.

De las dos relaciones

$$\vec{y}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0, \qquad \vec{y}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0,$$

se deduce:

$$\lambda_3^1 \vec{y}_1^{\,2} + \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_1 = 0 \qquad \text{con} \qquad \vec{y}_1^{\,2} \neq 0;$$
$$\lambda_3^2 \vec{y}_2^{\,2} + \vec{x}_3 \cdot \vec{y}_2 = 0 \qquad \text{con} \qquad \vec{y}_2^{\,2} \neq 0.$$

Se determina así un vector no nulo $\vec{y}_3$, ortogonal a $\vec{y}_1$ y a $\vec{y}_2$, puesto que el sistema $(\vec{y}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_r)$ es libre y, por consiguiente, igual le sucede al $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{x}_3, \ldots, \vec{x}_r)$.

Prosiguiendo de esta forma, se obtiene el sistema de vectores $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_r)$, en el que ninguno es nulo y son ortogonales dos a dos. Si se divide cada uno de ellos por su módulo, resulta el sistema ortonormal de vectores

$$\vec{e}_i = \frac{\vec{y}_i}{\text{mod. } \vec{y}_i}$$

que satisface las condiciones impuestas.

En particular, se deduce que todo espacio propiamente euclidiano P_n admite bases ortonormales.

1-20. El espacio P_n referido a una base ortonormal.—Refiramos un espacio propiamente euclidiano P_n a una base ortonormal $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$; es decir, a una base que satisfaga las condiciones

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \delta_{ij}. \qquad [1\text{-}38]$$

Las componentes x^i de un vector $\vec{x}$ de P_n respecto a esta base se calculan fácilmente; en efecto: de la igualdad

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j,$$

multiplicando escalarmente ambos miembros por el vector $\vec{e}_i$ se deduce:

$$x^i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i. \qquad [1\text{-}39]$$

De las relaciones [1-38] resultan las expresiones siguientes para el producto escalar de dos vectores:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \ldots + x^n y^n, \qquad [1\text{-}40]$$

y para la norma de un vector:

$$N\vec{x} = (x^1)^2 + (x^2)^2 + \ldots + (x^n)^2. \qquad [1\text{-}41]$$

En las fórmulas [1-40] y [1-41] se reconoce la generalización a n dimensiones de las fórmulas

clásicas que dan el producto escalar y la norma para los vectores libres del espacio de la geometría ordinaria referido a un triedro trirrectangular.

Se observará, además, que de las consideraciones anteriores se deduce que, dada una forma cuadrática definida positiva $g_{ij}x^i x^j$, siempre es posible mediante un cambio de base (o sea, efectuando una sustitución lineal sobre las x^i, tal como la [1-25]) escribir dicha forma cuadrática en la forma [1-41].

1-21. Componentes contravariantes y covariantes de un vector.—Designemos por E_n un espacio vectorial euclidiano, que supondremos referido a una base cualquiera $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Hemos visto en la sección anterior que, si tal base es ortonormal, las componentes x^i del vector $\vec{x}$ respecto a dicha base son iguales a los productos escalares de $\vec{x}$ por los vectores $\vec{e}_i$ de la base. No ocurre lo mismo cuando la base no es ortonormal, por lo que estableceremos la definición siguiente:

DEFINICIÓN.—*Dada una base cualquiera $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ del espacio vectorial euclidiano E_n:*

1.° *Llamaremos componentes contravariantes de un vector $\vec{x}$, respecto a esta base, a los números x^i tales que*

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i. \qquad [1\text{-}42]$$

2.° *Se denominan componentes covariantes de un vector $\vec{x}$, respecto a dicha base, a los números x_i definidos por los productos escalares*

$$x_i = \vec{x} \cdot \vec{e}_i. \qquad [1\text{-}43]$$

En lo sucesivo, las componentes contravariantes se representarán por medio de supraíndices, y las componentes covariantes, mediante subíndices.

Veremos en seguida la razón de tales denominaciones.

Es fácil calcular las componentes covariantes de un vector a partir de sus componentes contravariantes. En virtud de [1-42], se tiene:

$$\vec{x} = x^j \vec{e}_j.$$

Efectuando el producto escalar de los dos miembros de esta relación por el vector $\vec{e}_i$, se obtiene:

$$x_i = (\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) x^j,$$

e introduciendo los símbolos g_{ij},

$$x_i = g_{ij} x^j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [1\text{-}44]$$

Recíprocamente, busquemos la expresión de las componentes contravariantes de un vector a partir de sus componentes covariantes. Necesitamos para ello resolver el sistema de las n ecuaciones lineales con las n incógnitas x^j:

$$g_{ij} x^j = x_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [1\text{-}45]$$

En virtud de las consideraciones hechas en la sección 1-15, el determinante de las g_{ij} es distinto de cero, por lo que el sistema anterior puede resolverse aplicando la regla de Cramer. *En adelante, designaremos con g el determinante de las g_{ij}, y con α^{ji}, el coeficiente del elemento g_{ij} en el desarrollo de g.* De acuerdo con la regla de Cramer, se tiene:

$$x^j = \frac{\alpha^{ji}}{g} x_i.$$

y si hacemos

$$g^{ji} = \frac{\alpha^{ji}}{g}, \qquad [1\text{-}46]$$

obtenemos las fórmulas fundamentales

$$x^j = g^{ji} x_i. \qquad [1\text{-}47]$$

Dado que el determinante de los elementos g_{ij} es simétrico, se tendrá $\alpha^{ji} = \alpha^{ij}$ y, por consiguiente, las cantidades g^{ij}, que acabamos de definir por las fórmulas [1-46], son también simétricas respecto a sus dos índices. Además, según un conocido resultado de la teoría de determinantes,

$$\text{det.}\ |\alpha^{ji}| = g^{n-1},$$

de donde

$$\text{det.}\ |g^{ij}| = \frac{1}{g} \qquad [1\text{-}48]$$

1-22. Expresiones del producto escalar y de la norma mediante las componentes covariantes.—La

introducción de las componentes covariantes de un vector permite obtener expresiones particularmente sencillas del producto escalar y de la norma, cualquiera que sea la base.

Teniendo en cuenta las fórmulas [1-44] en la relación

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g_{ij} x^i y^j,$$

se obtiene:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y^i = x^i y_i. \quad [1\text{-}49]$$

de donde resulta, para la norma de un vector $\vec{x}$,

$$N\vec{x} = x^i x_i. \quad [1\text{-}50]$$

Además, es posible expresar el producto escalar de dos vectores y la norma de un vector mediante sus componentes covariantes exclusivamente. Basta para ello sustituir en las fórmulas [1-49] y [1-50] las componentes contravariantes por sus expresiones [1-47]; se tiene así:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = g^{ij} x_i y_j. \quad [1\text{-}51]$$

y también,

$$N\vec{x} = g^{ij} x_i x_j. \quad [1\text{-}52]$$

En virtud de [1-48], la forma bilineal [1-51] y la forma cuadrática [1-52] son no degeneradas.

1-23. Cambio de base sobre las componentes contravariantes y covariantes de un vector.—Estando el espacio vectorial euclidiano E_n referido

a una base cualquiera, acabamos de ver que el producto escalar de dos vectores $\vec{x}$, $\vec{y}$ puede expresarse en la forma

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y^i.$$

Si consideramos $\vec{x}$ como vector fijo, el producto escalar $\vec{x} \cdot \vec{y}$ define una forma lineal respecto al vector arbitrario $\vec{y}$, la cual admite como componentes las x_i en la base $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ dual de $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$.

Efectuemos en E_n el camb'o de base definido por las fórmulas:

$$a)\ \vec{e}_i = A_i^{j'} \vec{e}_{j'}; \qquad b)\ \vec{e}_{j'} = A_{j'}^{i} \vec{e}_i. \quad [1\text{-}53]$$

Hemos visto que las componentes contravariantes x^i de un vector $\vec{x}$ de E_n se transforman de acuerdo con las fórmulas:

$$a)\ x^i = A^i_{j'} x^{j'}; \qquad b)\ x^{j'} = A^{j'}_i x^i. \quad [1\text{-}54]$$

En cuanto a las componentes covariantes x_i, se transforman, según lo deducido anteriormente, de acuerdo con las fórmulas [1-22] relativas a las componentes de una forma lineal; es decir,

$$a)\ x_i = A_i^{j'} x_{j'}; \qquad b)\ x_{j'} = A^i_{j'} x_i. \quad [1\text{-}55]$$

Se observará que las sustituciones lineales que figuran en los segundos miembros de [1-53] *a*) y *b*) y de [1-55] *a*) y *b*) admiten respectivamente los mismos coeficientes; por el contrario, las que figuran en los segundos miembros de [1-54] *a*) y *b*) admiten los mismos coeficientes que las relativas a [1-53] *b*) y *a*). De esta coincidencia nace el nombre dado a las componentes.

1-24. Espacio vectorial euclidiano y dualidad.— Hemos visto que si $\vec{x}$ designa un vector del espacio euclidiano E_n, el producto escalar $\vec{x} \cdot \vec{y}$, siendo $\vec{y}$ un vector arbitrario, permite hacer corresponder al vector $\vec{x}$ una forma lineal definida sobre E_n. Recíprocamente, toda forma lineal definida sobre E_n puede considerarse como el producto escalar de un vector $\vec{x}$ determinado de E_n por otro vector arbitrario.

Refiriendo el espacio E_n a una base cualquiera y el espacio dual E_n^* a la base dual, resulta posible establecer la identificación del elemento de E_n de componentes x^i, en la base $(\vec{e}_i)$, con el elemento de E_n^* de componentes x_i, en la base dual, cuando dichas componentes están ligadas por las relaciones [1-44] y [1-47]; o sea,

$$x_i = g_{ij}\, x^j; \qquad x^j = g^{ij} x_i. \qquad [1\text{-}56]$$

Así que, en un espacio vectorial euclidiano y gracias al producto escalar, consideraremos como idénticos el espacio E_n y el espacio dual E_n^*.

CAPITULO II

LOS ESPACIOS PUNTUALES AFINES Y EUCLIDIANOS

2-1. Definición de espacio afín.—Consideremos el espacio puntual $\mathscr{E}$ de la geometría ordinaria. Sus elementos son puntos, con ayuda de los cuales es posible construir los vectores ligados del cálculo vectorial elemental. Estos vectores satisfacen evidentemente las dos relaciones siguientes:

$$\vec{AB} = -\vec{BA};$$

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}.$$

Elijamos en $\mathscr{E}$ un punto arbitrario O; de este modo, con cada punto A de $\mathscr{E}$ se encuentra asociado un vector libre $\vec{a}$ definido por $\vec{OA}$:

$$\vec{a} = \vec{OA}.$$

Recíprocamente, dado un vector libre $\vec{a}$ cualquiera, existe un punto A, y solo uno, tal que

$$\vec{OA} = \vec{a}.$$

De forma más general, consideremos un conjunto $\mathscr{E}$ cuyos elementos llamaremos puntos y

supongamos que a toda pareja (A, B) de tales puntos, tomados en este orden, se le pueda hacer corresponder un vector, designado por $\vec{AB}$, de un espacio vectorial E_n de n dimensiones, y que esta correspondencia goza de las propiedades siguientes:

a) $$\vec{AB} = -\vec{BA};$$

b) $$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB};$$

c) siendo O un punto arbitrario de $\mathcal{E}$, a todo vector $\vec{a}$ de E_n corresponde un punto A único, tal que

$$\vec{OA} = \vec{a}.$$

Cuando se cumplan estas tres condiciones, diremos que el conjunto $\mathcal{E}$ constituye un espacio puntual afín de n *dimensiones.* En adelante lo designaremos por la notación $\mathcal{E}_n$ y lo denominaremos real o complejo según que el espacio vectorial E_n esté definido respecto a los números reales o complejos. Nos limitaremos a considerar los espacios afines reales.

Respecto al vector designado por $\vec{AB}$, diremos, recurriendo a un ligero abuso del lenguaje, que A es el origen y B el extremo. La condición c) expresa entonces que, cualquiera que sea $\vec{a}$, definido el origen O en $\mathcal{E}$, queda perfectamente determinado el extremo A.

Se observará también que de las hipótesis hechas resulta que

$$\vec{AA} = \vec{0}.$$

2-2. Sistema de referencia en un espacio afín.— DEFINICIÓN: *Dado un espacio afín $\mathcal{E}_n$, se llama sistema de referencia al conjunto de un punto O de $\mathcal{E}_n$ y de una base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ del espacio vectorial asociado. El punto O se denomina origen del sistema de referencia.*

En lo sucesivo, un sistema de referencia se designará por la notación $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$, o más brevemente, $(O, \vec{e}_i)$.

Si designamos por A un punto cualquiera de $\mathcal{E}_n$, las componentes x^i del vector $\vec{OA}$, con relación a la base $(\vec{e}_i)$ se llamarán *coordenadas* de A respecto al sistema de referencia $(O, \vec{e}_i)$. En virtud de c), existe una correspondencia biunívoca entre los sistemas de n números reales $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ y los puntos A de $\mathcal{E}_n$.

Dos puntos dados A y B de $\mathcal{E}_n$, definidos por sus coordenadas (x^i) e (y^i) respecto a un sistema de referencia $(O, \vec{e}_i)$, definen un vector $\vec{AB}$. Según a) y b), se tiene:

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB} = \vec{OB} - \vec{OA},$$

de donde se deduce que el vector $\vec{AB}$ admite por componentes respecto a la base $(\vec{e}_i)$ las n cantidades $y^i - x^i$.

2-3. Cambio de sistema de referencia.—Nos proponemos encontrar las relaciones existentes entre las coordenadas de un mismo punto M de $\mathcal{E}_n$ respecto a dos sistemas de referencia distintos.

Sean $(O, \vec{e}_i)$ y $(O', \vec{e}_{i'})$ dos sistemas arbitrarios de referencia; para situar cada uno de estos sistemas respecto al otro, basta referir cada uno de los orígenes al otro, y cada una de las bases a la otra. Se tiene así:

$$\overrightarrow{OO'} = \alpha^i \vec{e}_i; \qquad \overrightarrow{O'O} = \alpha^{i'} \vec{e}_{i'};$$

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i; \qquad \vec{e}_i = A^{i'}_i \vec{e}_{i'}.$$

Sea M un punto cualquiera de $\mathcal{E}_n$, de coordenadas x^i respecto al sistema $(O, \vec{e}_i)$, y de coordenadas $x^{i'}$ respecto al $(O', \vec{e}_{i'})$. Por un lado, se tiene:

$$\overrightarrow{OM} = x^i \vec{e}_i. \qquad [2\text{-}1]$$

y, por otro,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = \alpha^i \vec{e}_i + x^{i'} \vec{e}_{i'} = (\alpha^i + A^i_{i'} x^{i'}) \vec{e}_i. \qquad [2\text{-}2]$$

Identificando en los segundos miembros de [2-1] y [2-2] los coeficientes de $\vec{e}_i$, se obtienen las fórmulas de transformación

$$x^i = \alpha^i + A^i_{i'} x^{i'}. \qquad [2\text{-}3]$$

Intercambiando los papeles desempeñados por ambos sistemas de referencia, es posible escribir también

$$x^{i'} = \alpha^{i'} + A^{i'}_i x^i. \qquad [2\text{-}4]$$

2-4. Subespacio afín.—DEFINICIÓN: *Se llama subespacio afín de un espacio afín $\mathcal{E}_n$ a toda parte $\mathcal{V}$ de $\mathcal{E}_n$ tal que, cualquiera que sea el punto* O *perteneciente a $\mathcal{V}$, los vectores $\overrightarrow{OM}$ asociados a los diferentes puntos* M *de $\mathcal{V}$ constituyan un subespacio vectorial de* E_n.

Para que esto suceda, basta que, para un punto O determinado, los vectores $\overrightarrow{OM}$ constituyan un subespacio vectorial V_r de E_n, pues si es O' otro punto cualquiera de $\mathcal{V}$,

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'},$$

y como $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OO'}$ pertenecen a V_r, lo mismo ocurrirá con $\overrightarrow{O'M}$. Recíprocamente, dado un vector $\vec{a}$ de V_r, existe un punto único M que, además de pertenecer a $\mathcal{V}$, es tal que

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \vec{a};$$

es decir, tal que

$$\overrightarrow{O'M} = \vec{a}.$$

Es obvio, según la propia definición, que si el subespacio vectorial admite r dimensiones, el subespacio afín considerado también admitirá r dimensiones, y, en consecuencia, lo designaremos por $\mathcal{V}_r$.

En el caso del espacio puntual afín $\mathcal{E}_3$ de la geometría ordinaria, los subespacios afines de una y de dos dimensiones son precisamente las rectas y los planos de $\mathcal{E}_3$.

2-5. Espacio puntual euclidiano.—DEFINICIÓN: *Se denomina espacio puntual euclidiano a un espacio puntual afín tal que el espacio vectorial asociado sea un espacio vectorial euclidiano.*

Si el espacio vectorial asociado E_n es propiamente euclidiano, también se dice que el espacio $\mathcal{E}_n$ es propiamente euclidiano. De forma análoga, el sistema de referencia $(O, \vec{e}_i)$ se dirá ortonormal si la base $(\vec{e}_i)$ es ortonormal para E_n.

El espacio puntual $\mathcal{E}_3$ de la geometría ordinaria constituye un ejemplo de un espacio puntual propiamente euclidiano de tres dimensiones.

En un espacio puntual euclidiano es fácil definir la distancia entre dos puntos. Por definición, el cuadrado de la distancia entre dos puntos A y B de $\mathcal{E}_n$ es la norma del vector $\overrightarrow{AB}$ (o del vector $\overrightarrow{BA}$), y se tiene:

$$(AB)^2 = (\overrightarrow{AB})^2.$$

Si el espacio considerado es *propiamente euclidiano*, $(AB)^2$ es esencialmente positivo para dos puntos distintos A y B, de manera que su raíz cuadrada es siempre real y define la distancia AB entre los dos puntos A y B. Si A, B y C son tres puntos cualesquiera de un espacio propiamente euclidiano, se tiene:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC},$$

y, aplicando a esta suma la desigualdad [1-33], resulta:

$$AC \leqslant AB + BC, \qquad [2\text{-}5]$$

inecuación conocida con el nombre de *desigualdad triangular*.

Volvamos al caso general de un espacio puntual euclidiano, que supondremos referido a un sistema cualquiera $(O, \vec{e}_i)$, y tratemos de hallar una expresión analítica de la distancia entre dos puntos. Si M tiene las coordenadas (x^i) y N las (y^i), se ha visto que las componentes del vector $\overrightarrow{MN}$ son $y^i - x^i$; por tanto, de acuerdo con las notaciones del capítulo primero,

$$(MN)^2 = (\overrightarrow{MN})^2 = g_{ij}(y^i - x^i)(y^j - x^j). \qquad [2\text{-}6]$$

Supongamos ahora que el punto N es infinitamente próximo al M, y sean $x^i + dx^i$ sus coordenadas. El cuadrado ds^2 de la distancia entre dos puntos infinitamente próximos queda definido por la forma cuadrática diferencial

$$ds^2 = g_{ij}\,dx^i\,dx^j, \qquad [2\text{-}7]$$

en donde las g_{ij} son constantes respecto a las (x^i). En particular es claro que si $\mathcal{E}_n$ es propiamente euclidiano y se refiere a un sistema ortonormal, se tiene que

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2, \qquad [2\text{-}8]$$

generalización al espacio de n dimensiones de la expresión de ds^2 de la geometría ordinaria en coordenadas cartesianas rectangulares.

CAPITULO III

ALGEBRA TENSORIAL

CONCEPTO DE PRODUCTO TENSORIAL

3-1. Producto tensorial de dos espacios.—Consideremos dos espacios vectoriales E_n y F_p de n y p dimensiones, respectivamente, y asociémosles un espacio vectorial de np dimensiones, que designaremos por $E_n \otimes F_p$. Si son $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dos vectores pertenecientes a E_n y F_p, respectivamente, haremos corresponder al par $(\vec{x}, \vec{y})$ un elemento, representado por el símbolo $\vec{x} \otimes \vec{y}$, del espacio vectorial $E_n \otimes F_p$; esta correspondencia gozará de las tres propiedades siguientes:

a) Si $\vec{x}, \vec{x}_1, \vec{x}_2$ pertenecen a E_n e $\vec{y}, \vec{y}_1, \vec{y}_2$ a F_p, se cumplen las igualdades relativas a la propiedad distributiva de la suma vectorial:

$$\vec{x} \otimes (\vec{y}_1 + \vec{y}_2) = \vec{x} \otimes \vec{y}_1 + \vec{x} \otimes \vec{y}_2;$$

$$(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) \otimes \vec{y} = \vec{x}_1 \otimes \vec{y} + \vec{x}_2 \otimes \vec{y};$$

b) Si es α un escalar arbitrario, se satisface la siguiente relación en cuanto a la propiedad asociativa:

$$\alpha\vec{x} \otimes \vec{y} = \vec{x} \otimes \alpha\vec{y} = \alpha(\vec{x} \otimes \vec{y});$$

c) Si $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n)$ e $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_p)$ designan dos vectores base cualesquiera de E_n y de F_p, los np elementos de $E_n \otimes F_p$,

$$\vec{x}_i \otimes \vec{y}_\alpha \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p),$$

forman una base de este último espacio.

Cumplidas estas tres condiciones, diremos que el espacio vectorial $E_n \otimes F_p$ es el *producto tensorial* de los espacios vectoriales E_n y F_p, y que el elemento $\vec{x} \otimes \vec{y}$ es el *producto tensorial de los dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$.*

3-2. Expresión analítica del producto tensorial de dos vectores.—Veamos cómo los tres axiomas precedentes permiten definir una ley de composición para los dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Para ello elijamos en los tres espacios vectoriales E_n, F_p y $E_n \otimes F_p$ bases cualesquiera $(\vec{e}_i)$, $(\vec{f}_\alpha)$ y $(\varepsilon_{i\alpha})$, tomando el subíndice i todos los valores de 1 a n y el α todos los valores de 1 a p. Según el axioma *c*), podremos escribir:

$$\vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha = \varepsilon_{i\alpha}. \tag{3-1}$$

Sean ahora

$$\begin{cases} \vec{x} = x^i\vec{e}_i \\ \vec{y} = y^\alpha\vec{f}_\alpha, \end{cases} \tag{3-2}$$

dos vectores arbitrarios pertenecientes, respectivamente, a E_n y a F_p. Efectuando el producto tensorial de los segundos miembros de [3-2], en virtud de los dos primeros axiomas se obtiene:

$$\vec{x} \otimes \vec{y} = x^i y^\alpha \vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha = x^i y^\alpha \varepsilon_{i\alpha} \qquad [3\text{-}3]$$

de donde se deduce que las cantidades $x^i y^\alpha$ son necesariamente las componentes del producto tensorial $\vec{x} \otimes \vec{y}$ respecto a la base considerada.

Recíprocamente, veamos si la ley de composición definida por la fórmula [3-3] satisface o no a los axiomas enunciados. Siendo las componentes $x^i y^\alpha$ lineales respecto a x^i e y^α, es obvio que se verifican los dos primeros axiomas. Sean entonces $(\vec{x}_i)$ e $(\vec{y}_\alpha)$ dos bases cualesquiera de E_n y de F_p; refiriendo los vectores $\vec{e}_k$ a la base $(\vec{x}_i)$, se tiene:

$$\vec{e}_k = a^i_k \vec{x}_i,$$

y también se podrá escribir:

$$\vec{f}_\beta = b^\alpha_\beta \vec{y}_\alpha$$

por lo cual todo elemento T de $E_n \otimes F_p$,

$$T = \Sigma t^{i\alpha} \vec{\varepsilon}_{i\alpha} = \Sigma t^{i\alpha} \vec{e}_i \otimes \vec{f}_\alpha \qquad [3\text{-}4]$$

puede ponerse en la forma:

$$T = t^{k\beta} a^i_k \vec{x}_i \otimes b^\alpha_\beta \vec{y}_\alpha = t^{k\beta} a^i_k b^\alpha_\beta \vec{x}_i \otimes \vec{y}_\alpha.$$

con lo que T queda expresado por una combinación lineal de los elementos $\vec{x}_i \otimes \vec{y}_\alpha$. Si $T = 0$, según [3-4], es necesario que $t^{i\alpha} = 0$, y el sistema de los np elementos $\vec{x}_i \otimes \vec{y}_\alpha$ es libre, lo cual prueba que se satisface el axioma *c*). Tenemos así la proposición siguiente:

TEOREMA.—*Cuando los espacios E_n, F_p y $E_n \otimes F_p$ se refieren a bases determinadas, asociadas mediante las relaciones* [3-1], *la única ley de composición que satisface a los axiomas de la sección* 3-1 *es la que hace corresponder el elemento de componentes $x^i y^\alpha$ de $E_n \otimes F_p$ al vector $\vec{x}$ de componentes x^i y al vector $\vec{y}$ de componentes y^α.*

3-3. Producto tensorial de varios espacios. Tensores.—Consideremos tres espacios vectoriales E_n, F_p y G_q de n, p y q dimensiones, respectivamente. Si $\vec{x}$ pertenece a E_n, $\vec{y}$ a F_p y $\vec{z}$ a G_q, se podrá multiplicar tensorialmente el elemento $\vec{x} \otimes \vec{y}$ de $E_n \otimes F_p$ por el elemento $\vec{z}$ de G_q, obteniéndose así el elemento $[\vec{x} \otimes \vec{y}] \otimes \vec{z}$ de un espacio vectorial H. Se llega al mismo elemento de H efectuando el producto tensorial de $\vec{x}$ por $\vec{y} \otimes \vec{z}$, y tendremos:

$$[\vec{x} \otimes \vec{y}] \otimes \vec{z} = \vec{x} \otimes [\vec{y} \otimes \vec{z}], \qquad [3\text{-}5]$$

si se admite que esta relación se verifica para

los vectores base, según lo convenido en [3-1]. En adelante supondremos que así sucede efectivamente, de tal suerte que el producto tensorial resulta asociativo. Designaremos por $\vec{x} \otimes \vec{y} \otimes \vec{z}$ el valor común de los dos miembros de [3-5], mientras que el espacio vectorial H se representará por el símbolo $E_n \otimes F_p \otimes G_q$.

Cuando se tiene un número finito r de espacios vectoriales E_n, F_p, G_q, ..., es inmediata la definición por recurrencia del producto tensorial de estos r espacios. Todo elemento de $E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$ no es necesariamente el producto tensorial de r vectores pertenecientes, respectivamente, a E_n, F_p, G_q, etc., por lo que daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN.—*Se llama tensor construido sobre los espacios base* E_n, F_p, G_q, ... *a todo elemento del espacio vectorial*

$$E_n \otimes F_p \otimes G_q \otimes \dots$$

que tenga la estructura de un producto tensorial.

LOS TENSORES AFINES

3-4. Tensores afines ligados a un espacio vectorial.—Dado un espacio vectorial E_n de n dimensiones, es posible efectuar el producto tensorial de q espacios idénticos al E_n, y el espacio vectorial de n^q dimensiones así obtenido se designará por $E_n^{q)}$, denominándolo potencia tensorial q de E_n. Ya que los espacios E_n y $E_n^{q)}$ están referidos a las bases

$(\vec{e}_i)$ y $(\varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_q})$, respectivamente, en virtud de [3-1] adoptaremos el convenio

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q} = \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_q}.$$

Con mayor generalidad, si $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \dots, \vec{x}_{(q)}$ designan q vectores cualesquiera de E_n, de componentes respectivas $x^{i_1}_{(1)}, x^{i_2}_{(2)}, \dots, x^{i_q}_{(q)}$, se tiene:

$$\vec{x}_{(1)} \otimes \vec{x}_{(2)} \otimes \dots \otimes \vec{x}_{(q)} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \dots x^{i_q}_{(q)} \varepsilon_{i_1 i_2 \dots i_q}. \qquad [3\text{-}6]$$

Consideremos el espacio vectorial E_n^* dual del E_n, referido a la base $(\vec{e}^{\,i})$ dual de $\vec{e}_i$. A partir de estos dos espacios podemos efectuar las operaciones siguientes: tomar potencias tensoriales arbitrarias de E_n o de E_n^* y multiplicarlas tensorialmente entre sí, obteniendo así productos tensoriales del tipo siguiente:

$$E_n^{(r_1)} \otimes E_n^{*(s_1)} \otimes E_n^{(r_2)} \otimes \dots \otimes E_n^{*(s_p)} \otimes E_n^{(r_m)}. \qquad [3\text{-}7]$$

Basados en la observación anterior, daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN.—*Se llama tensor afín ligado a un espacio vectorial* E_n *a todo elemento de los espacios vectoriales obtenidos efectuando el producto tensorial de espacios idénticos a* E_n *o a su dual.*

Si $(r_1 + r_2 + \dots + r_m) + (s_1 + s_2 + \dots + s_p) = q$, el espacio vectorial [3-7] es de n^q dimensiones. Todo elemento de [3-7] se denomina tensor afín de orden q, el cual es $(r_1 + r_2 + \dots + r_m)$ veces *contravariante* y $(s_1 + s_2 + \dots + s_p)$ veces *covariante*.

Todo elemento de $E_n^{(q)}$ es un tensor afín contravariante de orden q, y todo elemento perteneciente a $E_n^{*(q)}$ es un tensor afín covariante de orden q. En particular, y por una licencia de lenguaje, se dice a veces que los elementos de E_n son vectores contravariantes, mientras que los de E_n^* son vectores covariantes. Por supuesto, esta manera de expresarse varía según cuál de los espacios E_n o E_n^* se considera dado en primer lugar.

3-5. Componentes de un tensor afín.—Para representar las componentes de los diferentes tensores afines, es cómodo introducir algunas notaciones que vamos a aclarar. Razonaremos, en particular, sobre un tensor de orden q, elemento del espacio $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$. Una base de este espacio vectorial está constituida por el conjunto de los elementos

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes x^{i_q} = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}{}^{i_{q-1} i_q}, \qquad [3\text{-}8]$$

en donde en el segundo miembro se han escrito los índices superior o inferiormente como en el primer miembro. Sea T un tensor elemento de $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$ y refirámosle a la base [3-8]. Con objeto de conservar la notación de Einstein, conviene representar sus componentes por la notación $t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q}$, de suerte que T pueda escribirse:

$$\mathrm{T} = t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q} \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}{}^{i_{q-1} i_q}. \qquad [3\text{-}9]$$

Los índices $i_1, i_2, \ldots i_{q-2}$ se llaman superiores o *contravariantes*, y los i_{q-1}, i_q se denominan inferiores o *covariantes*. Basta observar las componentes de un tensor así escrito para saber las veces que dicho tensor es contravariante o covariante. De las fórmulas [3-8] y [3-9] se deduce (habiendo escrito para mayor claridad los signos de sumación) que

$$\mathrm{T} = \sum_{i_1} \Big(\sum_{i_2 \cdots i_q} t^{i_1 i_2 \cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q} \vec{e}_{i_1}\Big) \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \cdots \otimes \vec{e}_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes x^{i_q}.$$

Cada término de la suma que figura en el segundo miembro es el producto tensorial de q vectores contravariantes o covariantes, y dicha suma contiene n^{q-1} términos.

De esta manera, todo tensor afín de orden q aparece como suma de, a lo sumo, n^{q-1} productos tensoriales de q vectores contravariantes o covariantes.

Si el tensor T, elemento, p. ej., de $E_n^{(q)}$, es la suma de $p \leq n^{q-1}$ productos tensoriales de q vectores, se podrá también expresar como suma de p términos de igual estructura que el segundo miembro de [3-6], y sus componentes serán sumas de p términos de la forma

$$x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Es claro que, cualquiera que sea el tipo del tensor T, existirán descomposiciones análogas para sus componentes.

3-6. Cambio de base para las componentes de un tensor afín.—Razonemos de nuevo sobre un tensor T, elemento del espacio $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$. Si el

espacio E_n está referido a la base $(\vec{e}_i)$, E_n^* lo estará a la base dual (x^i), y $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$ a la base

$$\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_{q-2}} \otimes x^{i_{q-1}} \otimes x^{i_q}. \qquad [3\text{-}10]$$

Refiramos el espacio E_n a una nueva base $(\vec{e}_{j'})$, definida por

$$\vec{e}_i = A^{j'}_i \vec{e}_{j'}; \quad \vec{e}_{j'} = A^i_{j'} \vec{e}_i, \qquad [3\text{-}11]$$

con lo que el espacio $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$ se hallará referido a la base asociada

$$\vec{e}_{j'_1} \otimes \vec{e}_{j'_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{j'_{q-2}} \otimes x^{j'_{q-1}} \otimes x^{j'_q}. \qquad [3\text{-}12]$$

Busquemos la expresión de las componentes $t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q}$ de T respecto a la primera base, en función de sus componentes $t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}{}_{j'_{q-1} j'_q}$ con relac ón a la segunda.

Para ello, supongamos que T sea el producto tensorial de q vectores contravariantes o covariantes. Introduciendo las componentes de estos vectores en las dos bases mencionadas, se tiene:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \dots x^{i_{q-2}}_{(q-2)} x_{(q-1) i_{q-1}} x_{(q) i_q}; \qquad [3\text{-}13]$$

$$t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}{}_{j'_{q-1} j'_q} = x^{j'_1}_{(1)} x^{j'_2}_{(2)} \dots x^{j'_{q-2}}_{(q-2)} x_{(q-1) j'_{q-1}} x_{(q) j'_q}. \qquad [3\text{-}14]$$

Ahora bien: según las fórmulas de transformación de las componentes de un vector contravariante o covariante, se tiene:

$$x^{i_1}_{(1)} = A^{i_1}_{j'_1} x^{j'_1}_{(1)}; \dots; x^{i_{q-2}}_{(q-2)} = A^{i_{q-2}}_{j'_{q-2}} x^{j'_{q-2}}_{(q-2)}; x_{(q-1) i_{q-1}}$$
$$= A^{j'_{q-1}}_{i_{q-1}} x_{(q-1) j'_{q-1}}; x_{(q) i_q} = A^{j'_q}_{i_q} x_{(q) j'_q},$$

de donde se deduce que

$$t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q}$$
$$= A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \dots A^{i_{q-2}}_{j'_{q-2}} A^{j'_{q-1}}_{i_{q-1}} A^{j'_q}_{i_q} t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}{}_{j'_{q-1} j'_q}. \qquad [3\text{-}15]$$

Cambiando los papeles de ambas bases, se obtiene de modo inverso:

$$t^{j'_1 j'_2 \dots j'_{q-2}}{}_{j'_{q-1} j'_q}$$
$$= A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \dots A^{j'_{q-2}}_{i_{q-2}} A^{i_{q-1}}_{j'_{q-1}} A^{i_q}_{j'_q} t^{i_1 i_2 \dots i_{q-2}}{}_{i_{q-1} i_q}. \qquad [3\text{-}16]$$

Como todo tensor puede considerarse como suma de p productos tensoriales, y dado que las relaciones [3-15] y [3-16] son lineales respecto a las componentes introducidas, estas relaciones se extienden por sí mismas a las componentes de cualquier tensor afín que sea $q-2$ veces contravariante y 2 veces covariante.

La ley general de transformación de las componentes de cualquier tensor resulta evidente observando las fórmulas [3-15] y [3-16]. Es también claro que un razonamiento idéntico al precedente nos conduciría en particular a las fórmulas de transformación para las componentes de un tensor exclusivamente contravariante; estas son:

$$t^{i_1 i_2 \dots i_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \dots A^{i_q}_{j'_q} t^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}; \qquad [3\text{-}17]$$

$$t^{j'_1 j'_2 \dots j'_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \dots A^{j'_q}_{i_q} t^{i_1 i_2 \dots i_q}. \qquad [3\text{-}18]$$

En cuanto a las componentes de un tensor covariante, se transforman de acuerdo con las fórmulas:

$$t_{i_1 i_2 \dots i_q} = A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \dots A^{j'_q}_{i_q} t_{j'_1 j'_2 \dots j'_q}; \qquad [3\text{-}19]$$

$$t_{j'_1 j'_2 \dots j'_q} = A^{i_1}_{j'_1} A^{i_2}_{j'_2} \dots A^{i_q}_{j'_q} t_{i_1 i_2 \dots i_q}. \qquad [3\text{-}20]$$

Cabe también interpretar de la manera siguiente las fórmulas de transformación que hemos establecido: supongamos que los espacios E_n y E_n^q están referidos a $(\vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$, sendas bases asociadas, y consideremos un conjunto de n^q cantidades $t^{i_1 i_2 \ldots i_q}$ tales que cuando se pasa de las bases $(\vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$ a las bases $(\vec{e}_{i'})$ y $(\vec{e}_{i'_1} \otimes \vec{e}_{i'_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i'_q})$ se transformen según las leyes [3-17], [3-18]. Se puede hacer corresponder a ese conjunto de cantidades un tensor T que las admita como componentes respecto a la base $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$. Según la propia ley de transformación, estas cantidades definirán el mismo tensor T respecto a cualquier base arbitraria $(\vec{e}_{i'_1} \otimes \vec{e}_{i'_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i'_q})$; se tiene así el teorema:

TEOREMA.—*Para que un conjunto de n^q cantidades $t^{i_1 i_2 \ldots i_q}$, referidas a una base del espacio E_n^q, $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$, se pueda considerar como el sistema de componentes de un tensor contravariante determinado, es necesario y suficiente que al hacer un cambio de base dicho sistema se transforme de acuerdo con las leyes* [3-17] y [3-18].

Para las componentes de un tensor mixto de naturaleza cualquiera son válidos enunciados análogos.

3-7. Un criterio de tensorialidad.—De los resultados precedentes es fácil deducir un criterio de *tensorialidad* que es muy útil en la práctica. Con el fin de utilizar notaciones distintas de las anteriores trataremos el caso de un vector puramente covariante.

TEOREMA.—*Para que un conjunto de n^q cantidades $t_{i_1 i_2 \ldots i_q}$, referido a una base $(x^{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes \ldots \otimes x^{i_q})$ del espacio $E_n^{*(q)}$ pueda considerarse como el sistema de componentes de un tensor covariante, es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los vectores contravariantes $[\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q)}]$, de componentes $x^i_{(j)}$, la cantidad*

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \ldots x^{i_q}_{(q)}$$

permanezca invariante respecto a un cambio de base.

Veamos en primer lugar que la condición es necesaria. Si las $t_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ son las componentes de un tensor covariante, se transformarán según la ley

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} \to A^{i'_1}_{i_1} A^{i'_2}_{i_2} \ldots A^{i'_q}_{i_q} t_{i'_1 i'_2 \ldots i'_q}$$

y las componentes de los q vectores contravariantes introducidos lo harán de acuerdo con las fórmulas:

$$x^{i_1}_{(1)} \to A^{i_1}_{k'_1} x^{k'_1}_{(1)};\ x^{i_2}_{(2)} \to A^{i_2}_{k'_2} x^{k'_2}_{(2)};\ \ldots;\ x^{i_q}_{(q)} \to A^{i_q}_{k'_q} x^{k'_q}_{(q)};$$

de donde se deduce que

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \ldots x^{i_q}_{(q)}$$
$$\to A^{i'_1}_{i_1} A^{i_1}_{k'_1} A^{i'_2}_{i_2} A^{i_2}_{k'_2} \ldots A^{i'_q}_{i_q} A^{i_q}_{k'_q} t_{i'_1 i'_2 \ldots i'_q} x^{k'_1}_{(1)} x^{k'_2}_{(2)} \ldots x^{k'_q}_{(q)}.$$

Cabe también interpretar de la manera siguiente las fórmulas de transformación que hemos establecido: supongamos que los espacios E_n y E_n^q están referidos a $(\vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q})$, sendas bases asociadas, y consideremos un conjunto de n^q cantidades $t^{i_1 i_2 \dots i_q}$ tales que cuando se pasa de las bases $(\vec{e}_i)$ y $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q})$ a las bases $(\vec{e}_{i'})$ y $(\vec{e}_{i'_1} \otimes \vec{e}_{i'_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i'_q})$ se transformen según las leyes [3-17], [3-18]. Se puede hacer corresponder a ese conjunto de cantidades un tensor T que las admita como componentes respecto a la base $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q})$. Según la propia ley de transformación, estas cantidades definirán el mismo tensor T respecto a cualquier base arbitraria $(\vec{e}_{i'_1} \otimes \vec{e}_{i'_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i'_q})$; se tiene así el teorema:

TEOREMA.—*Para que un conjunto de n^q cantidades $t^{i_1 i_2 \dots i_q}$, referidas a una base del espacio E_n^q, $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_q})$, se pueda considerar como el sistema de componentes de un tensor contravariante determinado, es necesario y suficiente que al hacer un cambio de base dicho sistema se transforme de acuerdo con las leyes* [3-17] *y* [3-18].

Para las componentes de un tensor mixto de naturaleza cualquiera son válidos enunciados análogos.

3-7. Un criterio de tensorialidad.—De los resultados precedentes es fácil deducir un criterio de *tensorialidad* que es muy útil en la práctica. Con el fin de utilizar notaciones distintas de las anteriores trataremos el caso de un vector puramente covariante.

TEOREMA.—*Para que un conjunto de n^q cantidades $t_{i_1 i_2 \dots i_q}$, referido a una base $(x^{i_1} \otimes x^{i_2} \otimes \dots \otimes x^{i_q})$ del espacio $E_n^{*(q)}$ pueda considerarse como el sistema de componentes de un tensor covariante, es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los vectores contravariantes $[\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \dots, \vec{x}_{(q)}]$, de componentes $x^i_{(j)}$, la cantidad*

$$t_{i_1 i_2 \dots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \dots x^{i_q}_{(q)}$$

permanezca invariante respecto a un cambio de base.

Veamos en primer lugar que la condición es necesaria. Si las $t_{i_1 i_2 \dots i_q}$ son las componentes de un tensor covariante, se transformarán según la ley

$$t_{i_1 i_2 \dots i_q} \rightarrow A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \dots A^{j'_q}_{i_q} t_{j'_1 j'_2 \dots j'_q},$$

y las componentes de los q vectores contravariantes introducidos lo harán de acuerdo con las fórmulas:

$$x^{i_1}_{(1)} \rightarrow A^{i_1}_{k'_1} x^{k'_1}_{(1)};\ x^{i_2}_{(2)} \rightarrow A^{i_2}_{k'_2} x^{k'_2}_{(2)};\ \dots;\ x^{i_q}_{(q)} \rightarrow A^{i_q}_{k'_q} x^{k'_q}_{(q)};$$

de donde se deduce que

$$t_{i_1 i_2 \dots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \dots x^{i_q}_{(q)} \rightarrow A^{j'_1}_{i_1} A^{i_1}_{k'_1} A^{j'_2}_{i_2} A^{i_2}_{k'_2} \dots A^{j'_q}_{i_q} A^{i_q}_{k'_q} t_{j'_1 j'_2 \dots j'_q} x^{k'_1}_{(1)} x^{k'_2}_{(2)} \dots x^{k'_q}_{(q)}.$$

Así, pues, $A^{j'}_i A^i_{k'}$, que representa la componente de $\vec{e}_{k'}$ sobre $\vec{e}_{j'}$, nos da:

$$A^{j'}_i A^i_{k'} = \delta^{j'}_{k'} = \begin{cases} 0 \text{ para } j' \neq k' \\ 1 \text{ para } j' = k'. \end{cases} \qquad [3\text{-}21]$$

Se tiene, por tanto,

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)} = t_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q} x^{j'_1}_{(1)} x^{j'_2}_{(2)} \cdots x^{j'_q}_{(q)}. \qquad [3\text{-}22]$$

Recíprocamente, supongamos que se cumple la igualdad [3-22] cualesquiera que sean los vectores contravariantes $[\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q)}]$ introducidos; las componentes $x^{j'}_{(k)}$ de estos vectores se transforman de acuerdo con las fórmulas:

$$x^{j'_1}_{(1)} = A^{j'_1}_{i_1} x^{i_1}_{(1)}\,;\; x^{j'_2}_{(2)} = A^{j'_2}_{i_2} x^{i_2}_{(2)}\,;\; \ldots\,;\; x^{j'_q}_{(q)} = A^{j'_q}_{i_q} x^{i_q}_{(q)}\,;$$

de donde se deduce, identificando respecto a las $x^i_{(k)}$:

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}$$
$$= A^{j'_1}_{i_1} A^{j'_2}_{i_2} \cdots A^{j'_q}_{i_q} t_{j'_1 j'_2 \ldots j'_q} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Se ve así que las $t_{i_1 i_2 \ldots i_q}$ se transforman según la ley [3-19], con lo cual queda demostrado el teorema, que puede generalizarse del modo siguiente:

TEOREMA.—*Para que un conjunto de* n^{p+q} *cantidades* $t_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_{p+q}}$, *referidas a una base* $(x^{i_1} \otimes \ldots \otimes x^{i_p} \otimes x^{i_{p+1}} \otimes \ldots \otimes x^{i_{p+q}})$ *del espacio* $E^{*(p+q)}_n$, *se pueda considerar como el sistema de componentes de un tensor covariante, es necesario y suficiente que cualesquiera que sean los* p *vectores contravariantes* $[\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(p)}]$ *de componentes* $x^i_{(j)}$, *las cantidades*

$$t_{i_1 i_2 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_{p+q}} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_p}_{(p)}$$

sean las componentes de un tensor covariante de orden q.

En efecto: sean $(\vec{y}_{(1)}, \vec{y}_{(2)}, \ldots, \vec{y}_{(q)})$ q vectores contravariantes arbitrarios de componentes $y^i_{(j)}$; para que las cantidades $t_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_{p+q}}$ sean las componentes de un tensor covariante de orden $p + q$, es necesario y suficiente que la cantidad

$$t_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_{p+q}} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_p}_{(p)} y^{i_{p+1}}_{(1)} \cdots y^{i_{p+q}}_{(q)}$$

resulte invariante respecto a un cambio de base. Ahora bien, esta condición es también necesaria y suficiente para que las cantidades

$$t_{i_1 \ldots i_p i_{p+1} \ldots i_{p+q}} x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_p}_{(p)}$$

sean las componentes de un tensor covariante de orden q.

Pueden darse enunciados análogos válidos para las componentes de un tensor afín de cualquier naturaleza.

3-8. Algebra tensorial afín.—Hemos visto en el transcurso de lo anteriormente expuesto algunas operaciones algebraicas que, partiendo de

tensores conocidos, permiten deducir nuevos tensores; vamos a resumirlas rápidamente.

a) *Adición tensorial.*—Dados dos tensores del mismo orden q y de idéntica naturaleza, pertenecientes, p. ej., al espacio $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$, la adición vectorial en el espacio $E_n^{(q-2)} \otimes E_n^{*(2)}$ les hace corresponder un tercer tensor de orden q y de la misma naturaleza, que se llama su suma. Si los dos tensores considerados tienen, respectivamente, por componentes $t^{i_1\cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1}i_q}$ y $u^{i_1\cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1}i_q}$, el tensor suma tendrá como componentes:

$$s^{i_1\cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1}i_q} = t^{i_1\cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1}i_q} + u^{i_1\cdots i_{q-2}}{}_{i_{q-1}i_q}.$$

b) *Multiplicación tensorial.*—Dados dos tensores de órdenes q y q' y de cualquier naturaleza, el próducto tensorial, tal como se ha estudiado al principio de este capítulo, les hace corresponder un tensor de orden $q + q'$. Así, p. ej., si los tensores tienen por componentes $t^{i_1\cdots i_{q-1}}{}_{i_q}$ y $u_{i_{q+1}}{}^{i_{q+2}\cdots i_{q+q'}}$, el tensor producto admitirá como componentes:

$$p^{i_1\cdots i_{q-1}}{}_{i_q i_{q+1}}{}^{i_{q+2}\cdots i_{q+q'}} = t^{i_1\cdots i_{q-1}}{}_{i_q} \cdot u_{i_{q+1}}{}^{i_{q+2}\cdots i_{q+q'}}.$$

Consideremos un tensor cualquiera perteneciente a $E_n^{(q)}$. La multiplicación en $E_n^{(q)}$ de un tensor por un escalar aparece como caso particular de la multiplicación tensorial, a condición de considerar el escalar—o invariante—como un tensor de orden nulo, que es lo que haremos en lo sucesivo.

3-9. Contracción de índices.—Además de las dos operaciones fundamentales precedentes, hay

una tercera, llamada contracción de índices, que permite deducir de un tensor mixto de orden q nuevos tensores de orden $q - 2$.

Comencemos por considerar un tensor mixto de orden 2 y de componentes t_i^j, y vamos a probar que la cantidad $t_i{}^i$ obtenida dando valores iguales a los índices respectivamente variante y covariante i y j, y sumando después las componentes correspondientes, es invariante respecto a un cambio de base.

En efecto, en un cambio de base, se tiene:

$$t_i{}^i = A_i^{k'} A_{h'}^i t_{k'}^{h'}$$

y, según las fórmulas [3-10],

$$A_i^{k'} A_{h'}^i = \delta_{h'}^{k'} = \begin{cases} 0 \text{ si } h' \neq k' \\ 1 \text{ si } h' = k' \end{cases}$$

de donde se deduce que

$$t_i{}^i = t_{k'}{}^{k'}.$$

Consideremos ahora un tensor mixto de orden q y elijamos dos índices determinados, uno covariante y el otro contravariante. Para simplificar las notaciones, razonemos sobre los dos primeros índices del tensor.

$$t_{i_1}{}^{i_2}{}_{i_3} \cdots {}_{i_q}.$$

Demos valores iguales i a los índices i_1 covariante e i_2 contravariante, y sumemos respecto al índice i repetido dos veces; vamos a probar que las cantidades

$$t_i{}^i{}_{i_3} \cdots {}_{i_q}$$

así obtenidas son las componentes de un tensor de orden $q - 2$. Sean en efecto $[\vec{x}_{(3)}, \dots, \vec{x}_{q}]$, $q - 2$ vectores contravariantes arbitrarios. En virtud de los resultados de la sección 3-7, las cantidades

$$t_{i_1}{}^{i_1 i_2 \dots i_q} x^{i_3}_{(3)} \dots x^{i_q}_{(q)}$$

son las componentes de un tensor mixto de orden 2; por consiguiente, cualesquiera que sean los vectores $[\vec{x}_{(3)}, \dots, \vec{x}_{(q)}]$, la cantidad

$$t_{i}{}^{i i_2 \dots i_q} x^{i_3}_{(3)} \dots x^{i_q}_{(q)}$$

es invariante respecto a un cambio de base, lo que demuestra la propiedad enunciada; tenemos así:

Se llama contracción a la operación que consiste, una vez elegidos dos índices, uno covariante y el otro contravariante, en igualarlos y sumar respecto a este índice repetido dos veces. La contracción de dos índices en un tensor de orden q origina otro tensor de orden $q - 2$.

Es claro que si el tensor considerado lleva varias parejas de índices, uno covariante y el otro contravariante, se puede repetir con cada pareja la operación de contracción.

3-10. Multiplicación contracta. Criterio general de tensorialidad.—En la práctica se utiliza con frecuencia la operación de contracción de índices combinada con la de multiplicación tensorial, aplicadas a los diferentes tensores que componen

el producto; tal combinación de operaciones se llama *multiplicación contracta*, la cual se puede reiterar varias veces.

Si t_{ijkl} y u^{mnr} son las componentes de dos tensores, su producto tensorial tiene como componentes:

$$p_{ijkl}{}^{mnr} = t_{ijkl}\, u^{mnr},$$

y el tensor

$$p_{ijkl}{}^{klr} = t_{ijkl}\, u^{klr}$$

es uno de sus productos contractos, obtenido al hacer en el producto tensorial la contracción de los índices m y k, así como también la de los índices n y l.

De la definición dada de producto contracto cabe deducir un criterio de tensorialidad que generaliza los de la sección 3-7. Lo enunciaremos sobre un ejemplo:

TEOREMA.—*Para que el conjunto de cantidades t^{ijkl}, referidas a una base $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \otimes \vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)$, sea el sistema de componentes de un tensor contravariante es necesario y suficiente que, cualquiera que sea el tensor covariante s_{kl}, el conjunto de cantidades $t^{ijkl} s_{kl}$ constituya el sistema de componentes de un tensor contravariante.*

Que la condición es necesaria se deduce inmediatamente de la propia definición de producto contracto que acabamos de dar. Para demostrar que es suficiente, basta observar que se puede adoptar como tensor s_{kl} el producto tensorial de dos vectores covariantes de componentes x_k e y_l y utilizar el segundo teorema de la sección 3-7.

3-11. Tensores simétricos y antisimétricos.—Un tensor contravariante de segundo orden, que en una determinada base admite las componentes t^{ij}, se llama *simétrico* respecto a esos índices si

$$t^{ij} = t^{ji},$$

y se denomina *antisimétrico* si

$$t^{ij} = -t^{ji}.$$

Supongamos, p. ej., que es simétrico y hagamos un cambio de base; se tiene así:

$$t^{k'r'} = A_i^{k'} A_j^{r'} t^{ij} = A_i^{k'} A_j^{r'} t^{ji} = t^{r'k'},$$

lo cual demuestra que el hecho de que un tensor sea simétrico (o antisimétrico) es independiente de la base a que esté referido, siendo, por el contrario, una propiedad inherente al mismo.

Las mismas consideraciones son válidas para un tensor covariante de orden dos, y también se extienden sin dificultad a las parejas de índices, ambos covariantes o contravariantes, de un tensor de orden $q > 2$.

LOS TENSORES EUCLIDIANOS

3-12. Tensores euclidianos. Diferentes clases de componentes.—Supongamos un espacio vectorial *euclidiano*, E_n; en tal caso podemos identificar todo tensor de orden q con un tensor contravariante del mismo orden, de manera que no es necesario considerar los tensores contravariantes, covariantes o mixtos de idéntico orden como entes geométricos distintos.

En efecto, el espacio E_n, referido a una base cualquiera, y el espacio E_n^*, referido a la base dual, tienen una forma cuadrática fundamental cuyos coeficientes designaremos por g_{ij}, y hemos visto en la sección 1-24 que se podía identificar el elemento de E_n de componentes x^i con el elemento de E_n^* de componentes x_i, siempre que estas componentes se hallen ligadas por las relaciones:

$$x_i = g_{ij} x^j ; \qquad x^i = g^{ij} x_j.$$

Consideremos ahora un tensor T contravariante de orden q, que sea el *producto tensorial* de q vectores $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q)}$:

$$T = \vec{x}_{(1)} \otimes \vec{x}_{(2)} \otimes \ldots \otimes \vec{x}_{(q)}.$$

A cada uno de estos vectores corresponde un elemento perfectamente determinado de E_n^*, y supongamos dados los diferentes tensores afines obtenidos al reemplazar uno o varios de los vectores $\vec{x}_{(1)}, \vec{x}_{(2)}, \ldots, \vec{x}_{(q)}$ por el elemento correspondiente de E_n^*. Estos distintos tensores afines serán considerados como *constituyentes de un solo tensor euclidiano*, que admite por componentes contravariantes, covariantes o mixtas las componentes de los tensores afines contravariantes, covariantes o mixtos identificados.

Veamos ahora qué relaciones existen entre las

diferentes componentes del tensor euclidiano T. Designando por $x^i_{(k)}$ las componentes contravariantes del vector $\vec{x}_{(k)}$, las componentes contravariantes del tensor T serán:

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_q} = x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_q}_{(q)}.$$

Reemplacemos, p. ej., el vector $\vec{x}_{(2)}$ por el elemento correspondiente de E^*_n. Se obtienen así las componentes mixtas una vez covariantes:

$$t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 \cdots i_q} = x^{i_1}_{(1)} x_{(2) i_2} x^{i_3}_{(3)} \cdots x^{i_q}_{(q)},$$

siendo

$$x_{(2) i_2} = g_{i_2 j_2} x^{j_2}_{(2)};$$

de donde se deduce:

$$t^{i_1}{}_{i_2}{}^{i_3 \cdots i_q} = g_{i_2 j_2} t^{i_1 j_2 i_3 \cdots i_q}. \qquad [3\text{-}23]$$

Recíprocamente, se tiene también

$$t^{i_1 i_2 i_3 \cdots i_q} = g^{i_2 j_2} t^{i_1}{}_{j_2}{}^{i_3 \cdots i_q}. \qquad [3\text{-}24]$$

Repitiendo la operación con el índice i_3, obtenemos las componentes mixtas dos veces covariantes:

$$t^{i_1}{}_{i_2 i_3}{}^{\cdots i_q} = g_{i_3 j_3} t^{i_1}{}_{i_2}{}^{j_3 \cdots i_q} = g_{i_2 j_2} g_{i_3 j_3} t^{i_1 j_2 j_3 \cdots i_q}. \qquad [3\text{-}25]$$

Si se efectúa la operación sobre todos los índices, se llega a las componentes covariantes:

$$t_{i_1 i_2 \cdots i_q} = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_q j_q} t^{j_1 j_2 \cdots j_q}. \qquad [3\text{-}26]$$

Recíprocamente, las componentes contravariantes se expresan a partir de las componentes covariantes por medio de las fórmulas:

$$t^{i_1 i_2 \cdots i_q} = g^{i_1 j_1} g^{i_2 j_2} \cdots g^{i_q j_q} t_{j_1 j_2 \cdots j_q}. \qquad [3\text{-}27]$$

Se ve que por multiplicación por g_{ij} o por g^{ij} y sumación se llega a colocar cada uno de los q índices del tensor T en posición covariante o contravariante.

Sea ahora T un tensor contravariante cualquiera de orden q, el cual puede expresarse por una suma de p productos tensoriales de q vectores. Cada uno de estos productos tensoriales define un tensor euclidiano bien determinado, y consideremos los diferentes tensores afines de idéntica naturaleza asociados a dichos tensores euclidianos. Efectuando la suma, se hace corresponder al tensor T otros tensores afines cuyas componentes son las dadas por las fórmulas [3-23], [3-25] y [3-26], en virtud del carácter lineal de estas fórmulas respecto a las componentes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ de T. Resulta de aquí que esos tensores afines no dependen de la manera de descomponer T en suma de productos tensoriales; o sea, que se hallan ligados de forma intrínseca a T. Diremos así que *estos diferentes tensores afines definen un tensor euclidiano único*, cuyas componentes de las distintas clases son las componentes de los tensores afines identificados. Llegamos de este modo al teorema:

TEOREMA.—*Las diferentes componentes contravariantes, covariantes o mixtas de un tensor euclidiano se deducen unas de otras mediante multipli-*

cación por g_{ij} o por g^{ij} y sumación, repitiendo esta operación una o varias veces.

Los criterios de tensorialidad dados para los tensores afines se aplican, por supuesto, sin ninguna modificación a los tensores euclidianos; así diremos, p. ej., componentes covariantes de un tensor euclidiano, en lugar de componentes de un tensor covariante afín.

3-13. Tensores euclidianos simétricos o antisimétricos.—Diremos que un tensor euclidiano de orden 2 es *simétrico* si el tensor contravariante afín asociado es simétrico. Se tiene entonces:

$$t^{ij} = t^{ji},$$

de donde se deduce que

$$t_{hk} = g_{hi}g_{kj}t^{ij} = g_{hi}g_{kj}t^{ji} = t_{kh};$$

o sea, que las componentes covariantes son también simétricas respecto a sus dos índices. Recíprocamente, si las componentes covariantes son simétricas, también lo serán las contravariantes, como es fácil de ver. Propiedades análogas son válidas para un tensor euclidiano *antisimétrico*. Estas consideraciones se extienden sin dificultad a dos índices de un tensor de orden $q > 2$.

3-14. El tensor fundamental.—El producto escalar de dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de E_n, de componentes contravariantes x^i e y^j, se expresa por la fórmula

$$\vec{x}\,\vec{y} = g_{ij}x^iy^j.$$

Este producto escalar es invariante respecto a un cambio de base, cualesquiera que sean $\vec{x}$ e $\vec{y}$. De ello resulta que las g_{ij} son las componentes covariantes de un tensor euclidiano, al cual se le da el nombre de *tensor fundamental* del espacio E_n.

Como este tensor es simétrico, no admite otras componentes que el sistema de componentes mixtas:

$$g^j_i = g^{jk}g_{ik} = g^{jk}g_{ki}.$$

Para calcularlas, recurramos a la definición de las g^{ij}:

$$g^j_i = \frac{\alpha^{jk}g_{ki}}{g},$$

en donde α^{jk} designa el coeficiente de g_{jk} en el desarrollo del determinante g. En el numerador del segundo miembro figura el desarrollo de un determinante idéntico al g, excepto por lo que afecta a la columna j, en la cual se han reemplazado las g_{kj} por las g_{ki}. De ello se deduce que

$$g^j_i = \delta^j_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \qquad [3\text{-}28]$$

Los valores de las componentes contravariantes del tensor fundamental están dados, por consiguiente, por

$$g^{ik}g^j_k = g^{ij}.$$

Estas componentes coinciden, pues, con las cantidades g^{ij} introducidas en la sección 1-21. Resulta así la siguiente proposición:

TEOREMA.—*Las cantidades g_{ij} y g^{ij} son, respectivamente, las componentes covariantes y contravariantes de un tensor simétrico, llamado tensor fundamental del espacio euclidiano. Las cantidades g^j_i, definidas por las fórmulas* [3-28], *son sus componentes mixtas.*

3-15. Algebra de los tensores euclidianos.—Hemos visto que las componentes de los diferentes tipos de tensor euclidiano se expresan linealmente a partir, p. ej., de las componentes contravariantes de dicho tensor; de ello resulta que las operaciones del álgebra tensorial definidas para los tensores afines se extienden por sí mismas a los tensores euclidianos.

a) *Adición.*—La adición tensorial estudiada en la sección 3-8 hace corresponder a dos tensores euclidianos del mismo orden q un tercer tensor euclidiano de orden q, denominado su suma. Si los tensores dados tienen como componentes contravariantes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ y $u^{i_1 i_2 \cdots i_q}$, las componentes contravariantes del tensor suma serán:

$$s^{i_1 i_2 \cdots i_q} = t^{i_1 i_2 \cdots i_q} + u^{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Mediante multiplicación reiterada por el propio tensor fundamental y sumación, se obtienen las componentes covariantes:

$$s_{i_1 i_2 \cdots i_q} = t_{i_1 i_2 \cdots i_q} + u_{i_1 i_2 \cdots i_q},$$

y un resultado análogo es válido para las componentes mixtas homólogas.

b) *Multiplicación.*—La multiplicación tensorial hace corresponder a dos tensores euclidianos de órdenes q y q' un tercer tensor euclidiano de orden $q + q'$. Si los tensores considerados tienen como componentes contravariantes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ y $u^{i_{q+1} \cdots i_{q+q'}}$, el tensor producto admite las componentes contravariantes

$$p^{i_1 i_2 \cdots i_q i_{q+1} \cdots i_{q+q'}} = t^{i_1 i_2 \cdots i_q} u^{i_{q+1} \cdots i_{q+q'}}.$$

Esta igualdad sigue siendo válida si se colocan uno o varios de los índices homólogos de ambos miembros en posición covariante.

c) *Contracción.*—Consideremos un tensor euclidiano de componentes contravariantes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ y elijamos arbitrariamente dos de sus índices, p. ej., los dos primeros i_1 e i_2. Llevemos uno de ellos a la posición covariante; las componentes correspondientes serán:

$$t_{j_1}{}^{i_2 \cdots i_q} = g_{i_1 j_1} t^{i_1 i_2 \cdots i_q}.$$

Por contracción de los índices j_1 e i_2, se tiene:

$$t_j{}^{j i_3 \cdots i_q} = g_{ij} t^{i j i_3 \cdots i_q} = t^i{}_j{}^{i_3 \cdots i_q}, \qquad [3\text{-}29]$$

a consecuencia de la simetría de la g_{ij}. Las cantidades [3-29] son las componentes contravariantes de un tensor euclidiano de orden $q - 2$:

$$C^{i_3 \cdots i_q} = t_j{}^{j i_3 \cdots i_q}. \qquad [3\text{-}30]$$

De las fórmulas [3-29] resulta que este tensor no depende de cuál de los índices i_1 o i_2 sea el que se

haya reducido. Las igualdades [3-30] permanecen válidas si se colocan uno o varios de los índices $i_2, \ldots, i_q$ en posición covariante.

3-16. El espacio $E_n^{(q)}$ como espacio euclidiano.—En el espacio $E_n^{(q)}$, potencia tensorial q del espacio euclidiano E_n, es fácil definir una estructura de espacio euclidiano. Refiramos el espacio E_n a una base cualquiera $(\vec{e}_i)$ y el espacio $E_n^{(q)}$ a la base asociada $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$. A los dos tensores de orden q, T, de componentes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$, y U, de componentes $u^{i_1 i_2 \cdots i_q}$, hagamos corresponder el escalar

$$TU = t^{i_1 i_2 \cdots i_q} u_{i_1 i_2 \cdots i_q}, \qquad [3\text{-}31]$$

o sea,

$$TU = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_q j_q} t^{i_1 i_2 \cdots i_q} u^{j_1 j_2 \cdots j_q} = t_{j_1 j_2 \cdots j_q} u^{j_1 j_2 \cdots j_q}. \qquad [3\text{-}32]$$

Es obvio que la ley de composición así definida goza de las propiedades enunciadas en la sección 1-15 y que caracterizan el producto escalar de dos vectores de un espacio vectorial. Diremos que [3-31] es el producto escalar de los dos tensores T y U. Este producto escalar define así una estructura de espacio euclidiano sobre $E_n^{(q)}$.

En particular, el producto escalar de dos elementos $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$ y $(\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_q})$ de la base de $E_n^{(q)}$ es, de acuerdo con [3-32],

$$(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})\,(\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_q}) = g_{i_1 j_1} g_{i_2 j_2} \cdots g_{i_q j_q}, \qquad [3\text{-}33]$$

de tal suerte que la forma cuadrática fundamental del espacio euclidiano $E_n^{(q)}$ tiene por coeficientes las cantidades $g_{i_1 j_1}\, g_{i_2 j_2} \ldots g_{i_q j_q}$.

Si la base $(\vec{e}_i)$ de E_n se hubiese elegido ortonormal, se tendría

$$(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})\,(\vec{e}_{j_1} \otimes \vec{e}_{j_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{j_q}) = \delta_{i_1 j_1} \delta_{i_2 j_2} \cdots \delta_{i_q j_q},$$

y el segundo miembro sería nulo cuando la sucesión $(i_1, i_2, \ldots, i_q)$ fuese diferente de la $(j_1, j_2, \ldots, j_q)$, e igual a la unidad en caso contrario. Así, la base $(\vec{e}_{i_1} \otimes \vec{e}_{i_2} \otimes \ldots \otimes \vec{e}_{i_q})$ de $E_n^{(q)}$, deducida por producto tensorial de una base ortonormal de E_n, es también ortonormal.

Recordemos la circunstancia evidente de que las componentes covariantes del tensor T, considerado como vector del espacio euclidiano $E_n^{(q)}$, coinciden con las componentes covariantes de este tensor tal como se han definido *a priori*.

ELEMENTOS DE ALGEBRA EXTERIOR

3-17. Algebra exterior de orden 2.—Volvamos al caso en que el espacio E_n es un *espacio vectorial puro*, referido a una base $(\vec{e}_i)$ cualquiera. En el espacio $E_n^{(2)}$, referido a la base asociada, consideremos los tensores antisimétricos:

$$T = t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \sum_{i<j} t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j + \sum_{i \geq j} t^{ij}\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j, \qquad [3\text{-}34]$$

en donde

$$t^{ij} = -t^{ji}; \qquad t^{ii} = 0.$$

Cambiando en la segunda suma del último miembro de [3-34] los nombres de los índices i y j, y teniendo presente la antisimetría, se tiene:

$$T = \sum_{i<j} t^{ij} (\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i), \qquad [3\text{-}35]$$

así que todo tensor antisimétrico de $E_n^{(2)}$ se puede expresar como combinación lineal de los C_n^2 elementos

$$(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j - \vec{e}_j \otimes \vec{e}_i) \qquad (i < j). \qquad [3\text{-}36]$$

y estos C_n^2 elementos forman evidentemente un sistema libre, pues de lo contrario, tampoco lo formarían los $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$.

Cabe así enunciar el teorema siguiente:

TEOREMA.—*Los tensores antisimétricos de $E_n^{(2)}$ engendran un subespacio vectorial de C_n^2 dimensiones de $E_n^{(2)}$, el cual admite como base los elementos* [3-36].

Este subespacio vectorial, que designaremos por $\Lambda_n^{(2)}$, constituye el álgebra exterior de orden 2 definida sobre E_n.

3-18. Producto exterior de dos vectores.—DEFINICION: *Dados dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ de E_n, se llama producto exterior de ellos al tensor antisimétrico*

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \otimes \vec{y} - \vec{y} \otimes \vec{x}. \qquad [3\text{-}37]$$

Si x^i e y^i designan las componentes de $\vec{x}$ e $\vec{y}$ en $(\vec{e}_i)$, $\vec{x} \wedge \vec{y}$ admite por componentes en $(\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j)$ las cantidades antisimétricas:

$$p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i. \qquad [3\text{-}38]$$

El producto exterior de dos vectores goza de las propiedades siguientes, que bastarían para definirlo:

a) Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son vectores de E_n, y α es un escalar, el producto exterior goza de las propiedades ordinarias de linealidad:

$$\begin{cases} \vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z} \\ (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z} \\ \alpha\vec{x} \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge \alpha\vec{y} = \alpha(\vec{x} \wedge \vec{y}) \end{cases}$$

b) Es anticonmutativo:

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge \vec{x};$$

y, en particular,

$$\vec{x} \wedge \vec{x} = 0;$$

c) Si $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ es una base de E_n, los C_n^2 elementos de $\Lambda_n^{(2)}$,

$$\vec{e}_i \wedge \vec{e}_j \qquad (i < j) \qquad [3\text{-}39]$$

constituyen una base de $\Lambda_n^{(2)}$

Al producto exterior de dos vectores se le denomina también *bivector*.

3-19. Componentes estrictas de un bivector. Cambio de base.—En virtud de [3-35], el tensor antisimétrico T se puede escribir:

$$T = \sum_{i<j} t^{ij} \vec{e}_i \wedge \vec{e}_j.$$

Así que, considerado como elemento del espacio $\Lambda_n^{(2)}$, el tensor T admite, respecto a la base [3-39], las C_n^2 componentes t^{ij} $(i < j)$. Estas C_n^2 componentes reciben el nombre de *componentes estrictas* de T. A fin de distinguirlas de las n^2 componentes de T, considerado como elemento de $E_n^{(2)}$, utilizaremos para designarlas la siguiente notación:

$$t^{(ij)},$$

sobrentendiéndose que, en tal notación, i es siempre menor que j.

Veámos cómo se transforman las componentes estrictas cuando se pasa de la base $(\vec{e}_i)$ a otra base $(\vec{e}_{i'})$ de E_n. Los espacios $E_n^{(2)}$ y $\Lambda_n^{(2)}$ se hallan en tal caso referidos a las bases $(\vec{e}_{j'} \otimes \vec{e}_{i'})$ y $(\vec{e}_{j'} \wedge \vec{e}_{i'})$, y se tiene con las notaciones habituales:

$$t^{ij} = A^i_{k'} A^j_{l'} t^{k'l'}.$$

de donde se deduce que

$$t^{(ij)} = \sum_{k'<l'} A^i_{k'} A^j_{l'} t^{k'l'} + \sum_{k'>l'} A^i_{k'} A^j_{l'} t^{k'l'}.$$

Si cambiamos los nombres de los índices k', l' en la segunda suma y se tiene presente la antisimetría, resulta:

$$t^{(ij)} = \sum_{k'<l'} (A^i_{k'} A^j_{l'} - A^i_{l'} A^j_{k'}) t^{(k'l')};$$

así que las componentes estrictas de T se transforman, cuando se efectúa un cambio de base, de acuerdo con las fórmulas:

$$t^{(ij)} = \sum_{k'<l'} \begin{vmatrix} A^i_{k'} & A^j_{k'} \\ A^i_{l'} & A^j_{l'} \end{vmatrix} t^{(k'l')}. \qquad [3\text{-}40]$$

3-20. Formas exteriores de orden 2.—Hemos visto que a todo espacio vectorial E_n se le puede asociar el espacio vectorial dual E_n^* de las formas lineales definidas sobre E_n. A partir de E_n^* es posible construir un álgebra exterior de orden 2, que estará definida mediante los tensores afines *covariantes* antisimétricos de orden 2. Estos tensores definen un subespacio vectorial $\Lambda_n^{*(2)}$ de $E_n^{*(2)}$, que admite C_n^2 dimensiones. Daremos la siguiente definición:

DEFINICIÓN.—*Se llama forma exterior de orden 2 a todo elemento del álgebra exterior de orden 2, $\Lambda_n^{*(2)}$, construido sobre el espacio vectorial E_n^* de las formas lineales.*

Estando E_n referido a una base $(\vec{e}_i)$, referiremos E_n^* a la base dual (x^i), y referiremos los espacios $E_n^{*(2)}$ y $\Lambda_n^{*(2)}$ a las bases $(x^i \otimes x^j)$ y $(x^i \wedge x^j)$. Un elemento F de $\Lambda_n^{*(2)}$, de componentes f_{ij} en $E_n^{*(2)}$, se puede escribir:

$$F = \sum_{i<j} f_{(ij)} x^i \wedge x^j,$$

siendo

$$f_{(ij)} = f_{ij} \quad \text{para} \quad i < j.$$

Las C_n^2 cantidades $f_{(ij)}$ son las componentes estrictas de la forma F; en un cambio de base de E_n, se transforman de acuerdo con las fórmulas:

$$f_{(ij)} = \sum \begin{vmatrix} A^{k'}_i & A^{k'}_j \\ A^{l'}_i & A^{l'}_j \end{vmatrix} f_{(k'l')} \qquad [3\text{-}41]$$

Llamaremos *valor de la forma* F, para un elemento T de $\Lambda_n^{(2)}$, de componentes estrictas $t^{(ij)}$, al escalar

$$\sum_{i<j} f_{(ij)} t^{(ij)} = \frac{1}{2} \sum_{ij} f_{ij} t^{ij}. \qquad [3\text{-}42]$$

Si el tensor T varía en $\Lambda_n^{(2)}$, la cantidad [3-42] constituye una forma lineal definida sobre $\Lambda_n^{(2)}$; recíprocamente, dada una forma lineal definida sobre $\Lambda_n^{(2)}$, siempre se podrá escribir del modo siguiente:

$$\sum_{i<j} f_{(ij)} t^{(ij)}; \qquad [3\text{-}43]$$

las $t^{(ij)}$ se transforman en un cambio de base según las fórmulas [3-40] y, como la cantidad [3-43] es un escalar, las $f_{(ij)}$ se transformarán necesariamente de acuerdo con las fórmulas [3-41], siendo, por consiguiente, las componentes estrictas de un elemento de $\Lambda_n^{*(2)}$.

De aquí que los tensores afines covariantes antisimétricos de orden 2 puedan interpretarse tanto como definidores de los elementos de $\Lambda_n^{*(2)}$ como de los del espacio $[\Lambda_n^{(2)}]^*$, dual de $\Lambda_n^{(2)}$.

3-21. Tensores completamente antisimétricos.— Hasta ahora nos hemos limitado, a causa de su importancia, al estudio de los tensores antisimétricos de orden 2. Resultados análogos son válidos en el estudio de los tensores de orden $q \leqslant n$ completamente antisimétricos; es decir, antisimétricos respecto a todos los pares de índices tomados arbitrariamente. Los tensores contravariantes de este tipo constituyen un subespacio vectorial de C_n^q dimensiones de $E_n^{(q)}$. Para definirlos son suficientes C_n^q componentes estrictas [1].

Limitémonos a señalar los resultados relativos al caso $q = n$. Un tensor completamente antisimétrico de orden n admite una sola componente estricta $t^{(12\cdots n)}$. A consecuencia de la antisimetría, las componentes ordinarias de este tensor se deducen por medio de las fórmulas:

$$t^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} t^{(12\cdots n)} \qquad [3\text{-}44]$$

[1] Para más detalles concernientes al álgebra exterior, el lector puede consultar mi obra *Algèbre et Analyse linéaire*, París, Masson.

en donde $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$ es igual a cero si dos de los índices coinciden; igual a $+1$ si la permutación $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ formada con la sucesión $(1, 2, \ldots, n)$ es par, e igual a -1 en caso contrario.

Cuando se cambia la base $(\vec{e_i})$, la componente estricta $t^{(1 2 \cdots n)}$ se transforma según la fórmula,

$$t^{(1 2 \cdots n)} = \Delta t^{(1' 2' \cdots n')}, \qquad [3\text{-}45]$$

en donde Δ designa el determinante,

$$\Delta = \begin{vmatrix} A^1_{1'}, & A^2_{1'}, & \ldots & A^n_{1'}, \\ A^1_{2'}, & A^2_{2'}, & \ldots & A^n_{2'}, \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A^1_{n'}, & A^2_{n'}, & \ldots & A^n_{n'} \end{vmatrix} \qquad [3\text{-}46]$$

3-22. Algebra exterior sobre un espacio euclidiano.—Supongamos que E_n sea un espacio euclidiano. Los diferentes tensores que se introducen en álgebra exterior son entonces tensores euclidianos. Las componentes contravariantes y covariantes de un tensor euclidiano de orden 2 están ligadas por las relaciones:

$$t_{ij} = g_{ik} g_{jl} t^{kl}.$$

Si el tensor considerado es antisimétrico, sus componentes estrictas, contravariantes y covariantes, estarán ligadas por las relaciones:

$$t_{(ij)} = \sum_{k<l} \begin{vmatrix} g_{ik} g_{jk} \\ g_{il} g_{jl} \end{vmatrix} t^{(kl)}, \qquad [3\text{-}47]$$

que se establecen por un razonamiento análogo al de las secciones 3-17 y 3-19. El espacio $\Lambda^{(2)}_n$ está dotado de una estructura de espacio euclidiano, y la forma cuadrática fundamental admite los coeficientes $g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}$.

Para un tensor completamente antisimétrico de orden n, el mismo razonamiento prueba que entre la componente estricta covariante y la componente estricta contravariante existe la relación

$$t_{(12 \cdots n)} = g t^{(12 \cdots n)}, \qquad [3\text{-}48]$$

donde g designa, como de ordinario, el determinante formado con las g_{ij}.

3-23. Tensor adjunto de un tensor completamente antisimétrico.—En el caso en que E_n es un espacio euclidiano, existe un tensor completamente antisimétrico de orden n de particular interés, el cual está ligado de manera sencilla al determinante g. Supondremos para simplificar que el espacio es propiamente euclidiano.

Es conveniente hallar una interpretación geométrica de g en el espacio vectorial euclidiano de la geometría elemental. Si $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ designan tres vectores cualesquiera de componentes x^i, y^i, z^i en una base ortonormal de este espacio, el volumen V del paralelepípedo construido sobre los tres vectores $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ como aristas es igual al valor absoluto del determinante

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 \\ y^1 & y^2 & y^3 \\ z^1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix}$$

Su cuadrado,

$$V^2 = \begin{vmatrix} \Sigma(x^i)^2 & \Sigma x^i y^i & \Sigma x^i z^i \\ \Sigma x^i y^i & \Sigma(y^i)^2 & \Sigma y^i z^i \\ \Sigma x^i z^i & \Sigma y^i z^i & \Sigma(z^i)^2 \end{vmatrix}$$

se puede expresar por la fórmula intrínseca

$$V^2 = \begin{vmatrix} \vec{x}^2 & \vec{x}\,\vec{y} & \vec{x}\,\vec{z} \\ \vec{x}\,\vec{y} & \vec{y}^2 & \vec{y}\,\vec{z} \\ \vec{x}\,\vec{z} & \vec{y}\,\vec{z} & \vec{z}^2 \end{vmatrix} \qquad [3\text{-}49]$$

Sea ahora $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ una base cualquiera del espacio considerado. Los elementos del determinante que figura en el segundo miembro de [3-49] son precisamente las g_{ij} correspondientes a esta base, cuando se eligen como $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ los vectores $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Así que como V designa el volumen del paralelepípedo construido sobre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, se tiene:

$$V^2 = g.$$

Volvamos ahora al espacio propiamente euclidiano E_n y efectuemos el cambio de base que hace pasar de la base $(\vec{e}_i)$ a la $(\vec{e}_{i'})$; ¿cómo se transforma en este cambio de base el determinante g? Sabemos que sus elementos se transforman según la ley tensorial

$$g_{k'l'} = A^i_{k'} A^j_{l'} g_{ij}.$$

Resulta, pues, del teorema clásico acerca de la multiplicación de determinantes que, si g' designa el determinante de las $g_{k'l'}$, se tiene:

$$g' = \Delta^2 g,$$

en donde Δ designa el determinante [3-46] construido con las $A^i_{k'}$. Si se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros, se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} = |\Delta| \frac{1}{\sqrt{g'}} \qquad [3\text{-}50]$$

Limitémonos a efectuar cambios de base, a partir de la base $(\vec{e}_i)$, tales que el determinante Δ sea positivo; diremos en tal caso que consideramos solo cambios de base del mismo sentido que la base $(\vec{e}_i)$. Para tales cambios de base, la cantidad $1/\sqrt{g}$ se transforma como la componente estricta contravariante de un tensor completamente antisimétrico de orden n; según [3-48], este tensor admite como componente estricta covariante $\sqrt{g}$. Sus componentes contravariantes ordinarias se escriben:

$$\eta^{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} \frac{1}{\sqrt{g}}, \qquad [3\text{-}51]$$

en tanto que sus componentes covariantes están dadas por

$$\eta_{i_1 i_2 \cdots i_n} = \varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} \sqrt{g}, \qquad [3\text{-}52]$$

en donde las cantidades $\varepsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$ son numéricamente iguales a las $\varepsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n}$.

Dado un tensor completamente antisimétrico T, de orden q ($\leqslant n$) y de componentes $t^{i_1 i_2 \cdots i_q}$ y $t_{i_1 i_2 \cdots i_q}$, se llama *tensor adjunto* de T al tensor T' completamente antisimétrico y de orden $n - q$, obtenido por multiplicación contracta de T con [3-51]; o sea,

$$\left\{ \begin{aligned} t'^{i_{q+1} \cdots i_n} &= \frac{1}{q!}\, \eta^{i_1 i_2 \cdots i_q i_{q+1} \cdots i_n} t_{i_1 i_2 \cdots i_q} \qquad [3\text{-}53] \\ t'_{i_{q+1} \cdots i_n} &= \frac{1}{q!}\, \eta_{i_1 i_2 \cdots i_{q+1} \cdots i_n} t^{i_1 i_2 \cdots i_q} \qquad [3\text{-}54] \end{aligned} \right.$$

Los tensores completamente antisimétricos de órdenes n o $n - 1$ admiten respectivamente como tensor adjunto un escalar y un vector.

Si consideramos, p. ej., el espacio euclidiano de la geometría elemental, que supondremos referido a una base ortonormal, sea $\vec{x} \wedge \vec{y}$ un bivector de este espacio, del que nos proponemos hallar el vector adjunto $\vec{z}$. Designemos por x^i, y^i, z^i las componentes de $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$; el bivector $\vec{x} \wedge \vec{y}$ tendrá por componentes:

$$\left\{ \begin{aligned} p^{23} &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ p^{31} &= x^3 y^1 - x^1 y^3 \\ p^{12} &= x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{aligned} \right.$$

y, dado que el determinante g es igual a la unidad,

el vector adjunto tiene como componentes, en virtud de [3-53],

$$\left\{ \begin{aligned} z^1 &= x^2 y^3 - x^3 y^2 \\ z^2 &= x^3 y^1 - x^1 y^3 \\ z^3 &= x^1 y^2 - x^2 y^1 \end{aligned} \right. \qquad [3\text{-}55]$$

El vector $\vec{z}$ es, pues, lo que en cálculo vectorial elemental se denomina *producto vectorial* de los vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$. Se ve que la existencia de tal producto vectorial está ligada al hecho de que la geometría ordinaria admite tres dimensiones.

CAPITULO IV

EL ESPACIO EUCLIDIANO EN COORDENADAS CURVILINEAS

DERIVADA Y DIFERENCIAL DE UN VECTOR O DE UN PUNTO

4-1. Vector derivado de un vector.—Sea E_n un espacio vectorial de n dimensiones. Dada una variable escalar t, con intervalo de variación (a, b), si a cada valor de t se sabe hacer corresponder un vector $\vec{x}$ de E_n, diremos que este vector $\vec{x}$ es una *función* de t, lo que designaremos mediante la notación $\vec{x}(t)$.

Dotemos a E_n de una estructura de espacio propiamente euclidiano, mediante la introducción de una forma cuadrática fundamental definida positiva. Diremos que un vector variable $\vec{x}$ *tiende hacia el vector nulo* (o más brevemente, que tiende a cero) si el escalar mod. $\vec{x}$ tiende a cero. Es claro que esta definición es independiente de la forma cuadrática elegida.

Sentado esto, diremos que el vector $\vec{x}(t)$ es una *función continua* de t si, habiendo dado a la variable t un incremento Δt, el vector

$$\Delta\vec{x} = \vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)$$

tiende a cero cuando Δt tiende a cero. Si existe un vector $\vec{x}'$ tal que el vector

$$\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t} - \vec{x}'$$

tiende a cero cuando Δt tiende a cero, diremos que $\vec{x}'$ es el *vector derivado* de $\vec{x}$ para el valor t de la variable. Llamaremos *diferencial* de $\vec{x}$ al vector

$$d\vec{x} = \vec{x}'dt,$$

y así podremos representar el vector derivado $\vec{x}'$ con la notación

$$\vec{x}' = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

Estas definiciones son simples generalizaciones de sus análogas del cálculo vectorial elemental. Las fórmulas de derivación de una suma, del producto de un vector por un escalar, y de una función vectorial de función escalar, son formalmente idénticas a las fórmulas clásicas del cálculo vectorial elemental y se demuestran exactamente de la misma manera. Si el espacio vectorial E_n es euclidiano, lo mismo ocurre para la fórmula que da la derivada del producto escalar de dos vectores.

4-2. Vector derivada de un punto.—Sea $\mathcal{E}_n$ un espacio puntual afín de n dimensiones. Dada una variable escalar t, en un intervalo (a, b), si a cada

valor de t es posible asignar un punto M de $\mathcal{E}_n$, diremos que este punto M es *función* de t, y lo designaremos con la notación $M(t)$.

Siendo O un punto fijo arbitrario de $\mathcal{E}_n$, el vector $\vec{x} = \overrightarrow{OM}$ es función de t, y supongamos que aquel es derivable y admite como derivada $\vec{x}'$. Es obvio que el vector $\vec{x}'$ no depende del punto O elegido, sino solo de M. En efecto: si O′ designa otro punto fijo arbitrario,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

y, siendo fijo el vector $\overrightarrow{OO'}$,

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} = \vec{x}'$$

El vector $\vec{x}'$ se llama *vector derivada* del punto M y se representa por la notación $\overrightarrow{M'}$. Llamaremos *diferencial* del punto M al vector

$$d\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M'}dt,$$

con lo cual cabe representar el vector derivada $\overrightarrow{M'}$ por la notación $\dfrac{d\overrightarrow{M}}{dt}$

4-3. Función vectorial de varias variables escalares.—Como en el análisis vectorial elemental, un vector $\vec{x}$ puede ser función de varias variables escalares independientes α, β, γ. La noción de derivada parcial se extiende inmediatamente a tales funciones vectoriales. Se establece, como en el análisis ordinario, que

$$\frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial\alpha\partial\beta} = \frac{\partial^2 \vec{x}}{\partial\beta\partial\alpha},$$

siempre que esas derivadas parciales sean continuas. La diferencial de tal función vectorial se escribe

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial\alpha}d\alpha + \frac{\partial \vec{x}}{\partial\beta}d\beta + \frac{\partial \vec{x}}{\partial\gamma}d\gamma.$$

Si el vector $\vec{x}$ es función de la variable t por intermedio de varias funciones componentes escalares $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\gamma(t)$, se obtiene, bajo las mismas hipótesis que en el análisis ordinario, la fórmula de derivación de una función compuesta:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial\beta}\frac{d\beta}{dt} + \frac{\partial \vec{x}}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{dt}$$

Lo que acabamos de decir para los vectores derivados de un vector se extiende sin modificación a los vectores derivados de un punto.

COORDENADAS CURVILINEAS EN UN ESPACIO PUNTUAL EUCLIDIANO

4-4. Coordenadas curvilíneas. Sistema de referencia asociado.—En todo lo que resta de este capítulo, supondremos dado *un espacio puntual euclidiano* $\mathcal{E}_n$ de n dimensiones, en el cual nos

proponemos estudiar cierto número de nociones geométricas. Refiramos $\mathcal{E}_n$ a un sistema de referencia cualquiera (R) y designemos por (x^i) las coordenadas de un punto cualquiera M respecto a dicho sistema. Hemos visto que a todo conjunto de n números $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ corresponde un punto único M de $\mathcal{E}_n$, y recíprocamente. Para distinguir estas coordenadas de otras que vamos a introducir, diremos que aquellas son coordenadas rectilíneas.

Consideremos n funciones, varias veces diferenciables, de las n variables y^i, que designaremos por $f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ y escribamos:

$$x^i = f^i(y^1, y^2, \ldots, y^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [4\text{-}1]$$

Supondremos que estas n funciones son independientes, de tal suerte que, cuando las variables (y^i) varían en un dominio D′, sea posible resolver las n ecuaciones [4-1] respecto a las variables (y^i) y expresar estas últimas en función de las x^i:

$$y^i = g^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad [4\text{-}2]$$

en el supuesto de que el punto M de coordenadas (x^i) varía en cierto dominio D de $\mathcal{E}_n$. Supuestas independientes las n funciones [4-1], el determinante funcional

$$\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{D(y^1, y^2, \ldots, y^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \frac{\partial f^2}{\partial y^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^1} \\ \frac{\partial f^1}{\partial y^2} & \frac{\partial f^2}{\partial y^2} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f^1}{\partial y^n} & \frac{\partial f^2}{\partial y^n} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial y^n} \end{vmatrix} \qquad [4\text{-}3]$$

será distinto de cero en D′, como asimismo ocurrirá con el determinante funcional $\dfrac{D(y^1, y^2, \ldots, y^n)}{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}$ de las funciones [4-2], inverso del precedente.

Existe así una correspondencia biunívoca entre los puntos M de D y los sistemas de valores de las variables (y^i) pertenecientes a D′. Si las funciones f^i no son lineales, no es posible interpretar las y^i como sistema de coordenadas rectilíneas. Sin embargo, el punto M aparece como función, varias veces diferenciable, de las n variables escalares (y^i). Diremos que el espacio $\mathcal{E}_n$ ha sido referido, en el dominio D, *al sistema de coordenadas curvilíneas* (y^i). Llamaremos *curvas coordenadas* a las curvas lugares de un punto M, para el cual solo varíe una de las variables (y^i). Por un punto M de $\mathcal{E}_n$ pasan n líneas coordenadas. Estas curvas coordenadas se reducen a líneas rectas en el caso de las coordenadas rectilíneas, lo que justifica el nombre atribuido a estas.

Dado un sistema de coordenadas curvilíneas (y^i) y un punto M de $\mathcal{E}_n$, vamos a asociar al punto M un sistema de referencia llamado *sistema natural* en M del sistema (y^i). Este sistema natural tiene por origen el propio punto M y como vectores:

$$\vec{e}_i = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [4\text{-}4]$$

Es claro que el sistema de vectores $\vec{e}_i$ es libre, puesto que el determinante de las componentes de estos n vectores respecto al sistema inicial de referencia (R) no es otro que el determinante

[4-3], que es distinto de cero. Los n vectores $\vec{e}_i$ son ciertamente colineales con las tangentes a las n curvas coordenadas que pasan por M. Según [4-4], el vector diferencial de M se expresa por la fórmula

$$\vec{dM} = \vec{e}_i dy^i. \qquad [4\text{-}5]$$

De otra manera, las n cantidades dy^i son las componentes contravariantes del vector $\vec{dM}$ en el sistema natural de referencia en M del sistema (y^i).

Diremos que se efectúa un cambio de coordenadas curvilíneas sobre las (y^i) cuando sustituimos las variables (y^i) por el nuevo sistema de variables $(y^{i'})$, ligadas a las primeras por las fórmulas

$$y^{i'} = y^{i'}(y^1, y^2, \ldots, y^n); \quad y^i = y^i(y^{1'}, y^{2'}, \ldots, y^{n'}), \qquad [4\text{-}6]$$

siendo las $y^{i'}$ funciones varias veces diferenciables respecto a las y^i, y recíprocamente. Cuando se efectúa tal cambio de coordenadas curvilíneas, el sistema natural $(M, \vec{e}_i)$ del conjunto (y^i) queda simultáneamente sustituido por el sistema también natural $(M, \vec{e}_{i'})$ del conjunto $(y^{i'})$. Es fácil ver que se puede pasar de un sistema de referencia al otro; se tiene, en efecto,

$$\vec{e}_{i'} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^{i'}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial \vec{M}}{\partial y^i}\frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}},$$

según la fórmula de derivación de las funciones compuestas.

De aquí se deduce:

$$\vec{e}_{i'} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}}\vec{e}_i.$$

y, recíprocamente,

$$\vec{e}_i = \sum_{i'=1}^{i'=n} \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i}\vec{e}_{i'}.$$

Así, pues, se ha reemplazado la base $(\vec{e}_i)$ del espacio vectorial euclidiano asociado a $\mathcal{E}_n$ por la base $(\vec{e}_{i'})$, que se deduce de ella por las siguientes sustituciones lineales:

$$\vec{e}_i = A_i^{i'}\vec{e}_{i'}; \qquad \vec{e}_{i'} = A^i_{i'}\vec{e}_i, \qquad [4\text{-}7]$$

o bien,

$$A_i^{i'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i}; \qquad A^i_{i'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}}.$$

TEOREMA.—*A todo cambio de coordenadas curvilíneas* [4-6] *se halla asociado un cambio de sistema de referencia natural en* M, *definido por las fórmulas* [4-7], *donde*

$$A_i^{i'} = \frac{\partial y^{i'}}{\partial y^i}; \qquad A^i_{i'} = \frac{\partial y^i}{\partial y^{i'}} \qquad [4\text{-}8]$$

4-5. Ejemplo de coordenadas curvilíneas.—Consideremos el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ de la geometría ordinaria y sea $Oxyz$ un triedro trirrectángulo. El

sistema de coordenadas semipolares relativas a $Oxyz$ y el sistema de coordenadas polares del espacio son otros tantos ejemplos de coordenadas curvilíneas. Este último sistema, p. ej., está definido por las fórmulas

$$x = r\cos\theta\cos\psi, \quad y = r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\psi, \quad z = r\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

y, recíprocamente,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \psi = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}, \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Escribiremos:

$$y^1 = r, \qquad y^2 = \psi, \qquad y^3 = \theta$$

Las líneas coordenadas en M son, respectivamente, el radio vector OM, el paralelo de eje Oz que pasa por M, y el meridiano de centro O y radio r que pasa por M. El sistema natural de referencia asociado está formado por: $\vec{e}_1$, vector unitario de OM; $\vec{e}_2$, vector tangente al paralelo y de longitud $r\cos\theta$, y $\vec{e}_3$, vector tangente al meridiano y de longitud r. Estos tres vectores son constantemente perpendiculares entre sí.

De manera general, cuando los n vectores $\vec{e}_i$ del sistema natural de referencia son perpendiculares entre sí, se dice que el sistema de coordenadas curvilíneas considerado es un sistema de coordenadas ortogonales.

4-6. El elemento lineal del espacio.—Si el espacio puntual euclidiano $\mathscr{E}_n$ está referido a un sistema de coordenadas curvilíneas (y^i), el vector $\overrightarrow{dM}$ admite las diferenciales dy^i como componentes respecto al sistema natural en M. Por consiguiente, el cuadrado de este vector, o cuadrado de la distancia de dos puntos infinitamente próximos, está dado por la fórmula:

$$ds^2 = g_{ij}\,dy^i dy^j, \qquad [4\text{-}9]$$

en donde

$$g_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j.$$

Cuando varía el punto M, también varía el sistema natural de referencia, y los productos escalares g_{ij} de cada dos vectores del sistema se presentan como funciones de las coordenadas curvilíneas (y^i) del punto M. Para el ejemplo considerado en la sección precedente, se tiene:

$$ds^2 = dr^2 + r^2\cos^2\theta\,d\psi^2 + r^2\,d\theta^2. \qquad [4\text{-}10]$$

La expresión [4-9] recibe el nombre de *elemento lineal* o también el de *métrica* del espacio.

El conocimiento de esta expresión permite el cálculo inmediato de la longitud de un arco de curva de $\mathscr{E}_n$, lugar de un punto M definido por sus coordenadas curvilíneas. Si el arco de curva $\widehat{AB}$ está definido dando las y^i en función de un pará-

metro t, que varía en un intervalo (a, b), su longitud viene dada por la integral:

$$AB = \int_a^b \sqrt{g_{ij} \frac{dy^i}{dt} \frac{dy^j}{dt}}\, dt. \qquad [4\text{-}11]$$

De manera análoga, el elemento de volumen del espacio es el volumen del paralelepípedo construido con los vectores $\vec{e}_1 dy^1, \vec{e}_2 dy^2, \ldots, \vec{e}_n dy^n$; o sea,

$$dV = \sqrt{|g|}\, dy^1\, dy^2 \ldots dy^n, \qquad [4\text{-}12]$$

en donde g designa al determinante de las g_{ij}. Por integración obtendríamos el volumen de un cuerpo finito del espacio.

4-7. Campos de tensores.—Al espacio puntual euclidiano, $\mathcal{E}_n$, se halla asociado un espacio vectorial euclidiano, E_n. Cada sistema de referencia de $\mathcal{E}_n$ define una base de E_n y, por consiguiente, también define bases para las diversas potencias tensoriales de E_n. Para abreviar el lenguaje, diremos que las componentes de un tensor euclidiano respecto a una de tales bases son las componentes relativas al sistema de referencia de $\mathcal{E}_n$ considerado.

Sentado esto, supongamos que a cada punto M de $\mathcal{E}_n$ asociamos un tensor euclidiano definido por sus componentes relativas al sistema natural en M del conjunto (y^i). Diremos en tal caso que hemos establecido un *campo de tensores* en el sistema

de coordenadas curvilíneas (y^i). El análisis tensorial, al que dedicaremos el resto de este capítulo, se ocupa del estudio de estos campos de tensores.

Hemos visto que a todo cambio de coordenadas curvilíneas (y^i) corresponde un cambio del sistema natural de referencia en M definido por las fórmulas [4-7] y [4-8]. Por consiguiente, si T designa un tensor de orden 3, p. ej., con componentes mixtas $t^{ij}{}_k$, estas componentes se transforman en un cambio de coordenadas curvilíneas de acuerdo con las fórmulas tensoriales:

$$t^{ij}{}_k = A^i_{l'} A^j_{m'} A^{n'}_k t^{l'm'}{}_{n'},$$

en donde las A están definidas por las fórmulas [4-8].

Las cantidades g_{ij} son, en cada punto M, las componentes covariantes relativas al sistema natural de referencia en M de un tensor. El tensor fundamental g_{ij} nos proporciona, pues, un ejemplo de campo de tensores. En un cambio de coordenadas curvilíneas hay que tener bien presente que las g_{ij} se transforman según la ley:

$$g_{ij} = A^{k'}_i A^{l'}_j g_{k'l'}.$$

LOS SÍMBOLOS DE CHRISTOFFEL

4-8. El problema fundamental del análisis tensorial.—Sea

$$ds^2 = g_{ij}\, dy^i\, dy^j, \qquad [4\text{-}13]$$

el elemento lineal del espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ referido a un sistema de coordenadas curvilíneas (y^i).

Cuando se pretende estudiar los campos de tensores, en tal sistema de coordenadas curvilíneas, se tropieza con la dificultad de que los tensores asociados a puntos diferentes se hallan referidos a sistemas distintos. Para poder comparar entre sí dichos tensores, conviene estudiar cómo varía el sistema natural cuando se pasa de un punto M a otro infinitamente próximo.

El conocimiento del elemento lineal [4-13], en el cual

$$g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j.$$

nos da detalles muy precisos acerca de la forma del sistema natural de referencia en los diversos puntos de $\mathcal{E}_n$. Se nos plantea así el problema siguiente:

PROBLEMA.—*Estando referido el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ a un sistema de coordenadas curvilíneas (y^i), para el cual el elemento lineal del espacio es*

$$ds^2 = g_{ij} dy^i dy^j,$$

determínese, respecto al sistema natural $(M, \vec{e}_i)$ *en* M, *el sistema natural* $(M + \vec{dM}, \vec{e}_i + \vec{de}_i)$ *en el punto infinitamente próximo* $M + \vec{dM}$.

La posición del sistema $(M + \vec{dM}, \vec{e}_i + \vec{de}_i)$ quedará perfectamente determinada respecto a $(M, \vec{e}_i)$ si conocemos las componentes contravariantes, con relación a los vectores $\vec{e}_i$, de los vectores $\vec{dM}$ y $\vec{de}_i$.

Las componentes contravariantes de $\vec{dM}$ son las dy^i:

$$\vec{dM} = dy^i \vec{e}_i. \qquad [4\text{-}14]$$

Por otra parte, hagamos

$$\vec{de}_i = \omega^j{}_i \vec{e}_j, \qquad [4\text{-}15]$$

en donde las ω^j_i designan las componentes contravariantes de $\vec{de}_i$. Estas componentes son evidentemente formas lineales respecto al vector $\vec{dM}$, es decir, formas lineales respecto a las diferenciales dy^k. En consecuencia, se podrá escribir:

$$\omega^j{}_i = \Gamma^j_{ki} dy^k, \qquad [4\text{-}16]$$

siendo las Γ^j_{ki} n^3 funciones de las variables (y^k). El problema propuesto se encuentra así reducido a la determinación de las n^3 funciones Γ^j_{ki} a partir de las $\frac{n(n+1)}{2}$ funciones g_{ij}. Según se comprueba sin dificultad, [4-14] y [4-15] son las conocidas fórmulas relativas al triedro móvil o intrínseco que se utilizan en la geometría diferencial elemental de curvas y superficies.

4-9. Relaciones entre las $\Gamma_k{}^j{}_i$.—*a)* Supuesto conocido el elemento lineal [4-13], el sistema natural de referencia o sistema intrínseco, en cada punto M de $\mathcal{E}_n$, satisface las relaciones

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = g_{ij}. \qquad [4\text{-}17]$$

Por consiguiente, el sistema natural en el punto $M + d\vec{M}$ satisfará las relaciones deducidas por diferenciación de [4-17]:

$$\vec{e}_i d\vec{e}_j + \vec{e}_j d\vec{e}_i = dg_{ij}.$$

Teniendo presente las [4-17] y sustituyendo las $d\vec{e}_i$ mediante las [4-15], se llega a las fórmulas

$$g_{ih}\omega_j^h + g_{jh}\omega_i^h = dg_{ij}. \qquad [4\text{-}18]$$

La forma de estas últimas relaciones nos induce a introducir, al mismo tiempo que las ω_i^j, las componentes covariantes ω_{ji} del vector $d\vec{e}_i$ y, al propio tiempo que las Γ_{ki}^j, los coeficientes Γ_{kji} de dy^k en ω_{ji}; o sea,

$$\omega_{ji} = \Gamma_{kji} dy^k.$$

Estas diferentes cantidades están ligadas por las relaciones

$$\omega_{ji} = g_{jh}\omega^h{}_i; \quad \Gamma_{kji} = g_{jh}\Gamma_k{}^h{}_i; \quad \Gamma_k{}^j{}_i = g^{jh}\Gamma_{khi}. \qquad [4\text{-}19]$$

El conocimiento de las n^3 funciones Γ_{kji} es, pues, equivalente al de las n^3 funciones primitivas $\Gamma_k{}^j{}_i$. Con estas notaciones, las ecuaciones [4-18] entre formas diferenciales se escriben:

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dg_{ij}. \qquad [4\text{-}20]$$

Identificando en ambos miembros de [4-20] los coeficientes de dy^k, se llega al sistema equivalente de ecuaciones finitas:

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji} = \partial_k g_{ij}, \qquad [4\text{-}21]$$

en donde se ha puesto

$$\partial_k g_{ij} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial y^k},$$

a fin de hacer más clara en lo sucesivo la aplicación de la convención de Einstein [1].

El sistema [4-21] contiene tantas ecuaciones como cantidades distintas $\partial_k g_{ij}$, por lo que, siendo $\frac{n(n+1)}{2}$ el número de las g_{ij}, dicho sistema incluirá $\frac{n^2(n+1)}{2}$ ecuaciones.

b) Las ecuaciones [4-14] y [4-15], que nos dan respectivamente las diferenciales del punto M y de los vectores $\vec{e}_i$, tendrán que ser integrables; deberán darnos para las derivadas segundas de M y de $\vec{e}_i$ valores simétricos respecto a los índices de derivación. Escribamos las condiciones de integrabilidad de la ecuación [4-14] y del punto M. En virtud de esta última, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^k \partial y^j} = \frac{\partial}{\partial y^k}\left(\frac{\partial \vec{M}}{\partial y^j}\right) = \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial y^k};$$

[1] Si f designa una función de las coordenadas y_i, escribiremos en lo sucesivo:

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial y^i}$$

y, según [4-15],

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^k \partial y^j} = \Gamma_k{}^h{}_j \vec{e}_h. \qquad [4\text{-}22]$$

También se tiene:

$$\frac{\partial^2 \vec{M}}{\partial y^j \partial y^k} = \Gamma_j{}^h{}_k \vec{e}_h. \qquad [4\text{-}23]$$

Los primeros miembros de [4-22] y [4-23] han de ser iguales; es decir,

$$\Gamma_k{}^h{}_j \vec{e}_h = \Gamma_j{}^h{}_k \vec{e}_h.$$

de donde

$$\Gamma_k{}^h{}_j = \Gamma_j{}^h{}_k. \qquad [4\text{-}24]$$

lo cual, según [4-19], se puede escribir en la forma equivalente

$$\Gamma_{kij} = \Gamma_{jik}. \qquad [4\text{-}25]$$

Por tanto, las cantidades $\Gamma_k{}^j{}_i$ deben ser simétricas respecto a sus índices inferiores, y las cantidades Γ_{kji} han de serlo respecto a sus índices extremos. Las ecuaciones [4-25] nos dan, para cada valor de i, $\frac{n(n-1)}{2}$ ecuaciones. El sistema [4-25] contiene en total $\frac{n^2(n-1)}{2}$ ecuaciones, las cuales, junto con las $\frac{n^2(n+1)}{2}$ de [4-21], dan un sistema de n^3 ecuaciones lineales para las n^3 incógnitas Γ_{kji}.

Procedería ahora escribir las condiciones de integrabilidad de los vectores $\vec{e}_i$, pero demostraremos que las n^3 relaciones obtenidas permiten el cálculo efectivo de las Γ_{kji} a partir de las g_{ij} y de sus derivadas. Por consiguiente, las relaciones de integrabilidad de los vectores $\vec{e}_i$ aparecen como condiciones para que el problema planteado sea posible. Tales condiciones corresponden sencillamente a una cuestión a la que más adelante nos referiremos con mayores detalles y relacionada con el hecho de que, dada una forma cuadrática arbitraria [4-13], no siempre existe en $\mathscr{E}_n$ un sistema de coordenadas curvilíneas que permita interpretarla como el elemento lineal ds^2 del espacio euclidiano $\mathscr{E}_n$.

4-10. Determinación explícita de las $\Gamma_k{}^j{}_i$.— Es fácil resolver efectivamente el sistema de las n^3 ecuaciones lineales [4-21] y [4-25], pues de ellas se deduce que

$$\Gamma_{jik} + \Gamma_{kji} = \partial_k g_{ij}, \qquad [4\text{-}26]$$

y, por permutación circular de los índices,

$$\Gamma_{kji} + \Gamma_{ikj} = \partial_i g_{jk} \qquad [4\text{-}27]$$

$$\Gamma_{ikj} + \Gamma_{jik} = \partial_j g_{ki}. \qquad [4\text{-}28]$$

Sumando [4-26] con [4-27] y restando a continuación [4-28], se obtiene:

$$2\Gamma_{kji} = \partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}.$$

Designaremos mediante la notación $[ki, j]$ el algoritmo definido por la ecuación

$$[ki, j] = \frac{1}{2}\,[\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki}]. \qquad [4\text{-}29]$$

y, empleando esta notación, se tiene:

$$\Gamma_{kji} = [ki, j]. \qquad [4\text{-}30]$$

Recíprocamente, es evidente que los valores de Γ_{kji} dados por [4-30] satisfacen las relaciones [4-21] y [4-25]; de estos valores se obtienen inmediatamente los de las cantidades $\Gamma_k{}^j{}_i$:

$$\Gamma_k{}^j{}_i = g^{jh}\Gamma_{khi} = g^{jh}\,[ki, h].$$

Nos vemos así inducidos a introducir el algoritmo definido por la ecuación

$$\{{}_k{}^j{}_i\} = g^{jh}\,[ki, h]. \qquad [4\text{-}31]$$

de donde resulta:

$$\Gamma_k{}^j{}_i = \{{}_k{}^j{}_i\}. \qquad [4\text{-}32]$$

Los símbolos definidos por [4-29] y [4-31] se conocen respectivamente con los nombres de *símbolos de Christoffel de primera y de segunda especie.* Estos símbolos nos permiten calcular las Γ_{kji} y las $\Gamma_k{}^j{}_i$ a partir de las g_{ij} y de sus derivadas, con lo cual queda resuelto nuestro problema fundamental.

4-11. Cambio de coordenadas para las $\Gamma_k{}^j{}_i$.— Es importante observar que las ω_i^j o las $\Gamma_k{}^j{}_i$ *no constituyen las componentes de un tensor.* Busquemos cómo se transforman estos dos sistemas de cantidades cuando se efectúa un cambio de coordenadas curvilíneas. En este proceso, los vectores del sistema natural de referencia se transforman de acuerdo con las fórmulas

$$\vec{e}_i = A_i^{l'}\,\vec{e}_{l'}.$$

Diferenciando, tenemos:

$$d\vec{e}_i = A_i^{l'}\,d\vec{e}_{l'} + dA_i^{l'}\vec{e}_{l'}.$$

y como, en virtud de [4-15],

$$d\vec{e}_i = \omega_i^j\vec{e}_j\,; \qquad d\vec{e}_{l'} = \omega_{l'}^{m'}\,\vec{e}_{m'}\,,$$

se deduce que

$$\omega_i^j\vec{e}_j = A_i^{l'}\omega_{l'}^{m'}\vec{e}_{m'} + dA_i^{l'}\vec{e}_{l'} = [A_i^{l'}A_{m'}^j\omega_{l'}^{m'} + A_{l'}^j dA_i^{l'}]\vec{e}_j.$$

Identificando los coeficientes de $\vec{e}_j$, se ve que las ω_i^j se transforman según las fórmulas

$$\omega_i^j = A_i^{l'}A_{m'}^j\omega_{l'}^{m'} + A_{l'}^j\,dA_i^{l'}. \qquad [4\text{-}33]$$

y por introducción en esta última de las cantidades $\Gamma_k{}^j{}_i$, se obtiene:

$$\Gamma_k{}^j{}_i dy^k = A_i^{l'}\,A_{m'}^j\,\Gamma_{n'}{}^{m'}{}_{l'}\,dy^{n'} + A_{l'}^j\partial_k A_i^{l'}\,dy^k.$$

Como las dy^k son arbitrarias, podemos identificar en ambos miembros los coeficientes de dy^k, de donde

se deduce que las $\Gamma_{k}{}^{j}{}_{i}$ se transforman según las fórmulas

$$\Gamma_{k}{}^{j}{}_{i} = A^{r'}_{i} A^{j}_{m'} A^{n'}_{k} \Gamma^{m'}_{n'r'} + A^{j}_{r'} \partial_k A^{r'}_{i} . \qquad [4\text{-}34]$$

en las cuales intervienen las derivadas segundas de las funciones que definen el cambio de coordenadas curvilíneas.

DIFERENCIAL ABSOLUTA Y DERIVADA COVARIANTE

4-12. Diferencial absoluta de un vector.—*a*) Consideremos en $\mathcal{E}_n$ un campo de vectores $\vec{v}$ definidos por sus componentes *contravariantes* v^i y tratemos de expresar la diferencial $d\vec{v}$ del vector del campo para una variación infinitesimal del punto M mediante las componentes contravariantes de $d\vec{v}$. Cuando se pasa de M a M + $d\vec{M}$ no solo cambian las componentes v^i, sino que varía también el sistema natural de referencia conforme al estudio hecho anteriormente. El vector $\vec{v}$ está definido en todo punto de $\mathcal{E}_n$ por la relación

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i,$$

de donde por diferenciación resulta:

$$d\vec{v} = dv^i \vec{e}_i + v^i d\vec{e}_i .$$

Si se calculan las $d\vec{e}_i$ con ayuda de [4-15] y se cambian los índices, se obtiene:

$$d\vec{v} = dv^i \vec{e}_i + v^h \omega^i_h \vec{e}_i.$$

Por consiguiente, las componentes contravariantes del vector $d\vec{v}$ son las cantidades

$$\nabla v^i = dv^i + \omega^i_h v^h. \qquad [4\text{-}35]$$

Según su propia forma de originarse, las cantidades ∇v^i se transforman como las componentes contravariantes de un vector, lo cual no es tan evidente para las cantidades dv^i. Por esta razón se da a ∇v^i el nombre de *diferencial absoluta* de v^i. Por extensión, también se dice a veces que $d\vec{v}$ es la diferencial absoluta del vector $\vec{v}$.

En lugar de las diferenciales cabe introducir las derivadas parciales, con lo que ∇v^i es una forma diferencial lineal respecto a las dy^k:

$$\nabla v^i = \partial_k v^i \, dy^k + \Gamma_k{}^i{}_h v^h \, dy^k = (\partial_k v^i + \Gamma_k{}^i{}_h v^h) \, dy^k.$$

Ahora bien: como las cantidades dy^k, arbitrarias numéricamente, son las componentes contravariantes de un vector, se deduce que las cantidades

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_k{}^i{}_h v^h \qquad [4\text{-}36]$$

son las componentes de un tensor, en el que aparece como covariante el índice de derivación k. Este tensor se denomina *derivada covariante* del vector $\vec{v}$. Conviene observar que, al igual que las dv^i, las $\partial_k v^i$ no presentan carácter tensorial.

Si la diferencial absoluta, o la derivada covariante del vector $\vec{v}$, es idénticamente nula, los dife-

rentes vectores del campo son equipolentes entre sí; o, de otra forma, el campo es uniforme.

b) Supongamos ahora que los vectores $\vec{v}$ del campo están dados por sus componentes *covariantes* v_i e intentemos determinar $d\vec{v}$ mediante sus componentes covariantes ∇v_i. Para ello, consideremos un campo uniforme arbitrario $\vec{w}$, dado por sus componentes contravariantes w^i, y formemos el producto escalar

$$\vec{w}\,\vec{v} = w^i v_i;$$

como $d\vec{w}$ es nulo, diferenciando dicho producto escalar, se deduce:

$$\vec{w}\,d\vec{v} = w^i dv_i + v_i dw^i$$

y, como

$$\nabla w^i = dw^i + \omega_h^i w^h = 0,$$

sustituyendo en la anterior la dw^i deducida de esta, se obtiene:

$$\vec{w}\,d\vec{v} = w^i dv_i - \omega_h^i v_i w^h.$$

o bien:

$$w^i \nabla v_i = w^i (dv_i - \omega_i^h v_h).$$

Dado que esta relación es válida para cualesquiera w^i, se deduce que

$$\nabla v_i = dv_i - \omega_i^h v_h. \qquad [4\text{-}37]$$

A ∇v_i se le llama la diferencial absoluta de v_i. El mismo razonamiento anterior permite pasar de las diferenciales a las derivadas, y así obtenemos:

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma_k{}^h{}_i v_h, \qquad [4\text{-}38]$$

en donde las $\nabla_k v_i$ son las componentes covariantes del tensor derivado covariante del vector $\vec{v}$.

4-13. Diferencial absoluta de un tensor.—Las consideraciones precedentes se extienden sin dificultad a un campo de tensores cualesquiera de orden q. Vamos a determinar mediante sus componentes relativas al sistema natural $(M, \vec{e}_i)$ la diferencial del tensor del campo, considerado como un vector del espacio E_n^{q}, para una variación infinitesimal del punto M. A ese tensor diferencial se le llama *diferencial absoluta* del tensor del campo. Para simplificar las notaciones razonaremos sobre un tensor T de orden 2, definido por un sistema de componentes mixtas t_i^j. Designaremos por ∇t_i^j las componentes relativas a $(M, \vec{e}_i)$ del tensor diferencial absoluto.

Sean dos campos de vectores uniformes arbitrarios $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y formemos el escalar $t_i^j v^i w_j$. La diferencial de este escalar, para una variación infinitamente pequeña de M, está dada por la diferencia

$$(t_i^j + \nabla t_i^j) v^i w_j - t_i^j v^i w_j = \nabla t_i^j v^i w_j.$$

puesto que los dos campos de vectores son uniformes. Se tiene así:

$$d(t_i^j v^i w_j) = \nabla t_i^j v^i w_j.$$

Por otra parte,

$$d(t_i^j v^i w_j) = dt_i^j v^i w_j + t_i^j dv^i w_j + t_i^j v^i dw_j,$$

en donde, debido a la uniformidad de los campos, se tiene:

$$dv^i = -\omega_h^i v^h; \qquad dw_j = \omega_j^h w_h.$$

Cambiando los nombres de los índices de sumación introducidos, se deduce:

$$\nabla t_i^j v^i w_j = (dt_i^j - t_h^j \omega_i^h + t_i^h \omega_h^j) v^i w_j,$$

y como esta igualdad se cumple cualesquiera que sean los valores v^i, w_j de las componentes en M de los dos campos de vectores, resulta:

$$\nabla t_i^j = dt_i^j - \omega_i^h t_h^j + \omega_h^j t_i^h. \qquad [4\text{-}39]$$

La cantidad ∇t_i^j es también una forma diferencial lineal respecto a las dy^k. Si hacemos

$$\nabla t_i^j = \nabla_k t_i^j dy^k,$$

en donde,

$$\nabla_k t_i^j = \partial_k t_i^j - \Gamma_k{}^h{}_i t_h^j + \Gamma_k{}^j{}_h t_i^h, \qquad [4\text{-}40]$$

siendo las cantidades $\nabla_k t_i^j$ las componentes de un tensor, que es el tensor *derivada covariante* de T.

En las fórmulas [4-39] y [4-40] aparece claramente la regla general de formación de la diferencial absoluta y de la derivada covariante de un tensor.

Se pueden demostrar, como se hace en análisis elemental, las reglas habituales que dan la diferencial absoluta de una suma o de un producto de tensores. De igual manera, la diferenciación absoluta y la contracción son operaciones permutables, en el sentido de que el resultado es independiente del orden en que se hayan efectuado estas dos operaciones. Resulta de aquí que los productos contractos se diferencian siguiendo las mismas reglas que para los productos tensoriales generales. Respecto a la diferencial absoluta del tensor fundamental g_{ij}, existe un importante resultado debido a Ricci. Formemos la diferencial absoluta del tensor g_{ij}, y se tiene:

$$\nabla g_{ij} = dg_{ij} - \omega_i^h g_{hj} - \omega_j^h g_{ih};$$

pero, según las ecuaciones [4-18] que nos han servido para el cálculo efectivo de las formas ω_i^j, el segundo miembro es idénticamente nulo. Se obtiene así el resultado siguiente:

TEOREMA.—*La diferencial absoluta del tensor fundamental g_{ij} es nula.*

Con ayuda de este teorema de Ricci se comprueba inmediatamente que la diferenciación absoluta y el cambio de posición de los índices son efectivamente operaciones permutables.

4-14. Vector aceleración de un punto móvil.— En el espacio $\mathscr{E}_n$ consideremos un punto móvil M

función de un parámetro escalar t, que interpretaremos como representación del tiempo. Las coordenadas curvilíneas y^i de M resultan así funciones de t. El vector velocidad de M será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{M}}{dt},$$

y como el vector $d\vec{M}$ admite por componentes contravariantes las dy^i, el vector $\vec{v}$ tendrá por componentes contravariantes:

$$v^i = \frac{dy^i}{dt} \qquad [4\text{-}41]$$

El vector aceleración del punto M es el vector derivada del vector velocidad,

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

y como el vector $d\vec{v}$ admite por componentes contravariantes las ∇v^i, el vector $\vec{\gamma}$ tendrá las siguientes componentes contravariantes:

$$\gamma^i = \frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_k{}^i{}_h v^h \frac{dy^k}{dt}$$

o bien, según [4-41],

$$\gamma^i = \frac{d^2y^i}{dt^2} + \Gamma_k{}^i{}_h \frac{dy^h}{dt}\frac{dy^k}{dt} \qquad [4\text{-}42]$$

Si la aceleración del móvil M es constantemente nula, su trayectoria es una recta de $\mathcal{E}_n$; por consiguiente, cualquiera que sea el parámetro t, las rectas de $\mathcal{E}_n$ están definidas en coordenadas curvilíneas (y^i) por el sistema diferencial:

$$\frac{d^2y^i}{dt^2} + \Gamma_k{}^i{}_h \frac{dy^h}{dt}\frac{dy^k}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [4\text{-}43]$$

Resulta a veces cómodo tomar como variable independiente t la abscisa s de un punto de la recta, contada sobre ella a partir de un origen fijo. En tal caso, a lo largo de una recta de $\mathcal{E}_n$, las funciones $y^i(s)$ satisfacen al sistema diferencial

$$\frac{d^2y^i}{ds^2} + \Gamma_k{}^i{}_h \frac{dy^h}{ds}\frac{dy^k}{ds} = 0,$$

siendo el vector de componentes dy^h/ds el vector unitario sobre la recta.

OPERADORES DIFERENCIALES EN COORDENADAS CURVILINEAS

4-15. Gradiente de una función escalar.—Consideremos un campo escalar originado por una función φ de las coordenadas curvilíneas y^i del punto M. La diferencial absoluta de tal campo se reduce en este caso a la diferencial ordinaria $d\varphi$ de la función φ, la cual es asimismo un escalar. La derivada covariante correspondiente es precisamente el vector de componentes covariantes $\partial_k\varphi$. Además, resulta inmediato comprobar que, en un cambio de coordenadas, las $\partial_k\varphi$ se transforman

como las componentes covariantes de un vector. El vector de componentes covariantes $\partial_k \varphi$ recibe el nombre de *gradiente* de la función φ, y escribiremos:

$$\mathrm{grad}_k \, \varphi = \partial_k \varphi. \qquad [4\text{-}44]$$

Es obvio que las componentes contravariantes del gradiente de φ son:

$$\mathrm{grad}^i \, \varphi = g^{ik} \partial_k \varphi. \qquad [4\text{-}45]$$

Beltrami ha introducido, con el nombre de *parámetro diferencial de primer orden*, la norma del gradiente; o sea,

$$\Delta_1 \varphi = g^{ij} \partial_i \varphi \, \partial_j \varphi. \qquad [4\text{-}46]$$

En el espacio de la geometría elemental referido a coordenadas rectilíneas rectangulares, se tiene evidentemente:

$$\Delta_1 \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2$$

4-16. Rotacional de un campo de vectores.— Supongamos un campo de vectores $\vec{v}$ dado por sus componentes covariantes v_i; hemos visto que

$$\nabla_j v_i = \partial_j v_i - \Gamma_j{}^k{}_i v_k. \qquad [4\text{-}47]$$

Las Γ son simétricas respecto a sus dos índices inferiores y, al permutar en [4-47] los índices i y j, se podrá escribir:

$$\nabla_i v_j = \partial_i v_j - \Gamma_j{}^k{}_i v_k. \qquad [4\text{-}48]$$

Restando miembro a miembro [4-47] y [4-48], se obtiene:

$$\nabla_j v_i - \nabla_i v_j = \partial_j v_i - \partial_i v_j,$$

de donde resulta que las cantidades

$$\partial_j v_i - \partial_i v_j$$

son las componentes covariantes de un tensor antisimétrico, el cual se denomina *tensor rotacional* del vector $\vec{v}$, y se escribe:

$$\mathrm{rot}_{ij} \, \vec{v} = \partial_j v_i - \partial_i v_j. \qquad [4\text{-}49]$$

En el espacio de la geometría elemental se introduce, con el nombre de vector rotacional, el vector adjunto del tensor antisimétrico [4-49].

4-17. Divergencia de un campo de vectores.— Sea un campo de vectores $\vec{v}$ definido por sus componentes contrariantes v^i; se llama divergencia del vector $\vec{v}$ al escalar

$$\mathrm{div.}\, \vec{v} = \nabla_i v^i.$$

De la expresión

$$\nabla_j v^i = \partial_j v^i + \Gamma_j{}^i{}_h v^h,$$

para la derivada covariante, se deduce la siguiente expresión de la divergencia:

$$\mathrm{div.}\, \vec{v} = \partial_i v^i + \Gamma_i{}^i{}_h v^h. \qquad [4\text{-}50]$$

Vamos a transformar esta fórmula dando una nueva expresión de las cantidades $\Gamma_i{}^i{}_k$ que figuran en ella. Utilizando las notaciones de la derivada covariante, el teorema de Ricci relativo al tensor fundamental se escribe:

$$\nabla_k g_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_k{}^k{}_i g_{kj} - \Gamma_k{}^k{}_j g_{ik} = 0,$$

de donde se deduce por multiplicación contracta por g^{ij}:

$$g^{ij}\partial_k g_{ij} - \Gamma_k{}^i{}_i - \Gamma_k{}^j{}_j = 0,$$

o bien:

$$\Gamma_i{}^i{}_k = \frac{1}{2} g^{ij}\partial_k g_{ij}. \qquad [4\text{-}51]$$

La cantidad que figura en el segundo miembro de la última igualdad recuerda por su forma la derivada del determinante g; esta es, en efecto, la suma de los determinantes obtenidos reemplazando sucesivamente cada fila de g por otra fila formada con las derivadas de los elementos de la misma. Designando con α^{ij} el coeficiente de g_{ij} en el desarrollo de g, se tiene:

$$\partial_k g = \sum_{i=1}^{i=n}\sum_{j=1}^{j=n} \alpha^{ij}\partial_k g_{ij} = g g^{ij}\partial_k g_{ij}.$$

de donde se deduce:

$$\Gamma_i{}^i{}_k = \frac{1}{2}\frac{\partial_k g}{g} = \frac{\partial_k \sqrt{|g|}}{\sqrt{|g|}} \qquad [4\text{-}52]$$

Sustituyendo esta última en [4-50], que expresa la divergencia, se obtiene:

$$\text{div. } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}\,v^i). \qquad [4\text{-}53]$$

En coordenadas curvilíneas, la fórmula de Ostrogradsky para un dominio n-dimensional D hace intervenir la integral múltiple de orden n,

$$\int_D \text{div. } \vec{v}\, dV = \int_D \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}\,v^i)\,\sqrt{|g|}\,dy^1 \ldots dy^n$$
$$= \int_D \partial_i(\sqrt{|g|}\,v^i)\,dy^1 \ldots dy^n.$$

El último miembro se transforma sin dificultad en una integral extendida a la frontera de D, la cual es precisamente el flujo a través de dicha frontera del campo de vectores $\vec{v}$.

4-18. Laplaciana de una función.—En el espacio de la geometría elemental, referido a coordenadas rectilíneas rectangulares (x, y, z), aparece con frecuencia el operador:

$$\Delta_2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \text{div. } \overrightarrow{\text{grad.}}\ \varphi.$$

Este operador recibe los nombres de *laplaciana* o de *parámetro diferencial de segundo orden de Beltrami*.

Con mayor generalidad, dada en $\mathcal{E}_n$ una función escalar φ de las variables y^i, se llama *laplaciana* de φ al escalar

$$\Delta_2\varphi = \text{div. } \overrightarrow{\text{grad.}}\ \varphi. \qquad [4\text{-}54]$$

El estudio precedente nos permite expresar explícitamente, en un sistema cualquiera de coordenadas curvilíneas, la laplaciana de una función φ. En efecto, según el teorema de Ricci,

$$\Delta_2\varphi = \nabla_i(g^{ij}\partial_j\varphi) = g^{ij}\nabla_i(\partial_j\varphi).$$

de donde resulta:

$$\Delta_2\varphi = g^{ij}(\partial_{ij}\varphi - \Gamma_i{}^k{}_j\partial_k\varphi) \qquad [4\text{-}55]$$

De la expresión [4-53] de la divergencia, se deduce una expresión para la laplaciana que, de ordinario, resulta cómoda en los cálculos prácticos:

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\,\partial_i(\sqrt{|g|}\,g^{ij}\partial_j\varphi). \qquad [4\text{-}56$$

CAPITULO V

LOS ESPACIOS RIEMANNIANOS

METRICAS EUCLIDIANAS TANGENTES Y OSCULATRICES

5-1. Definición de los espacios de Riemann.— Consideremos una variedad puntual V_n de n dimensiones y varias veces diferenciable. La mejor imagen que cabe hacerse de tal variedad es la dada por el conjunto de todas las configuraciones posibles de un sistema dinámico con n grados de libertad. Supondremos esencialmente que el entorno de cada punto M_0 de V_n se puede representar mediante un sistema de n coordenadas (y^i), susceptible de tomar todos los valores posibles próximos al sistema de coordenadas (y_0^i) del punto M_0. Estas coordenadas y^i, que sirven para representar analíticamente un recinto de V_n, se pueden elegir de infinitos modos. Como en la geometría diferencial elemental de las superficies, convendremos en que, al pasar de un sistema de coordenadas (y^i) a otro $(y^{i'})$, las nuevas coordenadas son funciones diferenciables de las antiguas hasta un orden suficientemente avanzado, y recíprocamente.

Ligada a la variedad V_n considerada elegiremos una métrica; para ello, en el sistema de coordena-

das adoptado, elijamos una forma cuadrática diferencial:

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j, \qquad [5\text{-}1]$$

cuyos coeficientes g_{ij} sean funciones arbitrarias de las y^i, con la única condición de ser diferenciables hasta un orden convenientemente elevado. Si la métrica [5-1] no satisface las condiciones señaladas al final de la sección 4-9 no existirán en $\mathcal{E}_n$ sistemas de coordenadas curvilíneas tales que la métrica de $\mathcal{E}_n$ tome la forma [5-1]; diremos en tal caso que la métrica [5-1] no es euclidiana y que define a V_n como un espacio de Riemann.

Así, un espacio de Riemann es en definitiva una variedad de n dimensiones dotada de una métrica tal como la [5-1], y se denominará propiamente riemanniano cuando la forma [5-1] sea definida positiva. En el caso general, [5-1] puede expresarse como suma algebraica de n cuadrados de formas diferenciales lineales, y se llama *signatura* de la forma [5-1] al conjunto de signos + y de signos — que preceden a esos cuadrados.

5-2. Métrica euclidiana tangente en un punto.— El medio más simple de dotar de propiedades geométricas a un espacio riemanniano consiste en identificarlo localmente, en la medida de lo posible, con un espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$. A este fin, introduzcamos el concepto de métrica euclidiana tangente en un punto M_0 de V_n.

Supongamos un espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ con la misma signatura que V_n y un punto M_0 de coordenadas (y_0^i) del espacio riemanniano V_n. Hagamos

corresponder al punto M_0 otro punto m_0 del $\mathcal{E}_n$ y un sistema de referencia $(m_0, \vec{e}_i)$ sometido a las únicas condiciones:

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = (g_{ij})_0, \qquad [5\text{-}2]$$

en donde $(g_{ij})_0$ designan los valores en M_0 de los coeficientes de [5-1].

Hagamos corresponder de la manera siguiente a todo punto M próximo al M_0 de V_n otro punto m de $\mathcal{E}_n$ del entorno de m_0; si el punto M tiene las coordenadas (y^i), el punto m queda definido por la relación:

$$\overrightarrow{m_0 m} = [(y^i - y_0^i) + \Psi'^{i}_{(2)}(y^k - y_0^k)]\vec{e}_i. \qquad [5\text{-}3]$$

en donde las funciones $\Psi'^{i}_{(2)}$ no cumplen más condición que la de ser de segundo grado respecto a las variables $y^k - y_0^k$, para $y^k - y_0^k$ próximo a cero. En tal caso, diremos que esa correspondencia define una *representación de primer orden* en el entorno de M_0. El punto m se llama imagen del M en dicha representación, siendo m_0 la imagen de M_0.

Mediante la fórmula [5-3], el punto m queda definido como función de n variables escalares (y^i), de donde resulta que las (y^i) constituyen un sistema de coordenadas curvilíneas para el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$, en el entorno de m_0. Para este sistema de coordenadas curvilíneas, el sistema natural de referencia en m_0 está definido, en virtud de [5-3], por los vectores:

$$\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial y^i}\right)_0 = \vec{e}_i;$$

es decir, que coincide con el sistema $(m_0, \vec{e}_i)$ que habíamos considerado inicialmente. Por consiguiente, si designamos por

$$\bar{ds}^2 = \bar{g}_{ij}dy^i dy^j \qquad [5\text{-}4]$$

la métrica del espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ en el sistema de coordenadas (y^i), se deduce (según [5-2]) para $y^i = y^i_0$:

$$(\bar{g}_{ij})_0 = \vec{e}_i\vec{e}_j = (g_{ij})_0. \qquad [5\text{-}5]$$

Resulta que las dos métricas [5-1] y [5-4] tienen los mismos coeficientes para $y^i = y^i_0$, y se dice que dos de tales métricas son *tangentes* para $y^i = y^i_0$.

Efectuemos un cambio de coordenadas que haga pasar de las coordenadas (y^i) a nuevas coordenadas $(y^{i'})$ y sea $(m_0, \vec{e}_{i'})$ el sistema natural en m_0 para las coordenadas $(y^{i'})$. Un cálculo inmediato muestra que el vector $\vec{m_0 m}$ definido por [5-3] se puede escribir:

$$\vec{m_0 m} = [(y^{i'} - y^{i'}_0) + \Xi^{i'}_{(2)}(y^{k'} - y^{k'}_0)]\vec{e}_{i'}.$$

en donde las funciones Ξ satisfacen la misma condición que las funciones Ψ. Resulta de aquí que el *concepto de representación de primer orden es independiente del sistema de variables empleado* o, como se dice también, presenta carácter intrínseco.

En el cambio de variables considerado, las $(\bar{g}_{ij})_0$ se transforman según la ley:

$$(\bar{g}_{ij})_0 = (A^{k'}_i)_0(A^{l'}_j)_0(\bar{g}_{k'l'})_0,$$

en donde

$$A^{k'}_i = \frac{\partial y^{k'}}{\partial y^i}$$

Para que la noción de métrica euclidiana tangente presente carácter intrínseco es necesario y suficiente que se tenga:

$$(g_{ij})_0 = (A^{k'}_i)_0\,(A^{l'}_j)_0\,(g_{k'l'})_0.$$

Después de estas consideraciones convendremos en lo sucesivo en que, *en todo cambio de coordenadas, los coeficientes g_{ij} de la métrica de un espacio riemanniano se transforman según la ley*

$$g_{ij} = A^{k'}_i A^{l'}_j g_{k'l'}. \qquad [5\text{-}6]$$

Dado que las nociones de representación de primer orden y de métrica euclidiana tangente en un punto presentan carácter intrínseco, gracias a ellas podemos extender a los espacios riemannianos cierto número de propiedades geométricas de origen euclidiano.

5-3. Nociones geométricas deducidas de las métricas euclidianas tangentes.—*a*) Elijamos en el espacio riemanniano V_n con métrica

$$ds^2 = g_{ij}dy^i dy^j, \qquad [5\text{-}7]$$

un punto M_0, y sea $\mathcal{E}_n$ el espacio euclidiano tangente en M_0, que supondremos referido al sistema natural $(m_0, \vec{e}_i)$ en m_0 para el sistema de coordenadas curvilíneas (y^i). En m_0 la métrica de $\mathcal{E}_n$ está dada, según lo visto anteriormente, por la forma cuadrática:

$$(g_{ij})_0\, dy^i dy^j.$$

Diremos que está dado un tensor por sus componentes relativas a las (y^i) en el punto M_0 de V_n cuando en el punto m_0 de $\mathcal{E}_n$ se halle dado un tensor por sus componentes relativas al sistema $(m_0, \vec{e}_i)$. Si se efectúa un cambio de coordenadas que haga pasar de las coordenadas (y^i) a las $(y^{i'})$, el sistema de referencia $(m_0, \vec{e}_i)$ quedará reemplazado por el $(m_0, \vec{e}_{i'})$, con:

$$\vec{e}_i = (A_i^{i'})_0 \vec{e}_{i'}; \quad \vec{e}_{i'} = (A_{i'}^i)_0 \vec{e}_i. \qquad [5\text{-}8]$$

y las componentes t^{ij}_k, p. ej., de un tensor T de orden 3 se transforman según la ley tensorial clásica:

$$t^{ij}{}_k = (A_{l'}^i)_0\, (A_{m'}^j)_0\, (A_k^{n'})_0\, t^{l'm'}{}_{n'}. \qquad [5\text{-}9]$$

Las componentes de los diferentes tipos de tensor T se deducen unas de otras por multiplicación contracta por las cantidades $(g_{ij})_0$ y $(g^{ij})_0$.

Si se designa por M el punto elegido en V_n, se podrá omitir en las fórmulas precedentes el índice cero. Así, toda el álgebra tensorial euclidiana se extiende sin otras modificaciones a los vectores y tensores ligados a un mismo punto M de V_n. El álgebra de estos tensores se reduce a la traducción del álgebra tensorial en el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ mediante el concepto de métrica euclidiana tangente. En particular, designando por $\vec{v}$ y $\vec{w}$ dos vectores ligados a M y de componentes v^i y w^i, su producto escalar viene dado por la fórmula:

$$\vec{v}\,\vec{w} = g_{ij} v^i w^j.$$

b) La introducción de las métricas euclidianas tangentes en un punto permite también definir en la geometría de los espacios de Riemann ciertas nociones que hacen intervenir dominios de 1, 2, ..., n dimensiones de V_n.

Supongamos, p. ej., que el espacio V_n sea propiamente riemanniano. Con idénticas notaciones que anteriormente, la distancia elemental de los dos puntos M_0, M en el espacio de Riemann es igual a la distancia elemental euclidiana de los dos puntos imágenes:

$$\overline{m_0 m}^2 = (g_{ij})_0 dy^i dy^j = (g_{ij})_0 dy^i dy^j = \overline{M_0 M}^2.$$

De la distancia elemental entre dos puntos en el espacio de Riemann, que está dada por

$$ds = \sqrt{g_{ij} dy^i dy^j},$$

se deduce por integración la longitud de un arco

orden. Dado que la representación es ya de primer orden, se tendrá:

$$\left(\frac{\partial \vec{m}}{\partial y^i}\right)_0 = \vec{e}_i$$

y, por consiguiente,

$$(\bar{g}_{ij})_0 = (g_{ij})_0.$$

Por otra parte, derivando [5-11], se tiene:

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{m}}{\partial y^j \partial y^k}\right)_0 = \left\{ {i \atop jk} \right\}_0 \vec{e}_i.$$

Comparando con [5-10], *escrita* para $y^i = y^i_0$, se deduce:

$$\left\{ {i \atop jk} \right\}_0 = \left\{ \overline{{i \atop jk}} \right\}_0,$$

de donde resulta la igualdad de los símbolos de Christoffel de primera especie para $y^i = y^i_0$; además, según [4-26],

$$(\partial_k \bar{g}_{ij})_0 = (\partial_k g_{ij})_0. \qquad [5\text{-}13]$$

Así pues, la métrica de Riemann y la métrica euclidiana [5-12] admiten los mismos coeficientes y las *mismas derivadas de estos coeficientes* para $y^i = y^i_0$, por lo que dichas dos métricas se llaman osculatrices para $y^i = y^i_0$. Se puede demostrar como anteriormente que las nociones de representación de segundo orden y de métricas osculatrices tienen carácter intrínseco. Con ayuda de estas

nociones definiremos en un espacio de Riemann la diferencial absoluta de un vector o de un tensor.

Con el propósito de precisar esta noción de representación vamos a considerar un ejemplo tomado de la teoría ordinaria de superficies. El estudio geométrico de las superficies, siguiendo el método de Gauss, es decir, el estudio de las superficies, *salvo una deformación* en el espacio euclidiano ordinario, consiste en considerar tales superficies como un espacio de Riemann de dos dimensiones. Sea S una superficie, M_0 uno de sus puntos, y $\mathcal{E}_2$ el plano tangente en M_0. A todo punto M de S próximo al M_0 se le hace corresponder el punto m proyección ortogonal de M sobre $\mathcal{E}_2$. La correspondencia entre M y m define una representación de segundo orden, y la métrica establecida sobre $\mathcal{E}_2$ es osculatriz de la correspondiente a la superficie.

5-5. Campo de tensores de V_n. Diferencial absoluta.—Supongamos ligado a cada punto M de V_n un tensor T en la forma siguiente. Se puede hacer corresponder al punto M en $\mathcal{E}_n$ un sistema de referencia compatible con los coeficientes de la métrica riemanniana en el punto M, por lo que tomaremos las componentes del tensor T respecto a ese sistema de referencia. Una vez conocido para cada punto M tal sistema de componentes en función de las coordenadas (y^i), diremos que se tiene un campo de tensores en V_n. Las g_{ij} constituyen un ejemplo de un campo de tensores de este tipo.

Para comparar los tensores ligados a puntos infinitamente próximos M_0 y M de V_n, necesitamos relacionar entre sí los sistemas de referencia corres-



pondientes en $\mathcal{E}_n$. Para ello, emplearemos una representación de segundo orden sobre $\mathcal{E}_n$ del entorno de M_0 y adoptaremos como sistemas de referencia los naturales ligados a los puntos m_0 y m, imágenes de M_0 y M en la representación. El tensor ligado al punto M quedará así representado por el tensor imagen definido por sus componentes respecto al sistema de referencia natural en m.

Cuando se cambia de representación de segundo orden, es decir, cuando se modifican las funciones $\Psi^i_{(3)}$, el punto m queda reemplazado por otro punto que solo difiere de él en un vector infinitésimo de tercer orden respecto a las $y^i - y^i_0$ consideradas como infinitésimos principales. Los vectores del sistema natural en m quedan modificados por vectores infinitésimos de, por lo menos, segundo orden. Por consiguiente, el tensor imagen del tensor ligado al punto M se halla definido con el mismo orden de aproximación.

Sean ahora T_0 y T los tensores infinitamente próximos ligados a los puntos M_0 y M. Tales tensores están representados, en cualquier representación de segundo orden, por dos tensores imágenes cuya diferencia está determinada independientemente de la representación elegida, salvo infinitésimos de orden no inferior al segundo. La parte principal de esta diferencia de tensores imágenes será, por definición, la *diferencial absoluta* del tensor T.

Consideremos, p. ej., en V_n un campo de vectores $\vec{v}$ determinado por sus componentes contravariantes v^i. En los puntos M_0 y M, el vector del

campo admite vectores imágenes en una representación de segundo orden cuya diferencia geométrica tiene las siguientes componentes contravariantes, respecto al sistema natural de referencia en m_0:

$$(\nabla v^i)_0 = (dv^i)_0 + (\omega^i_h)_0 v^h_0,$$

en donde,

$$(\omega^i_h)_0 = \left\{ {}_k{}^i{}_h \right\}_0 dy^k. \tag{5-14}$$

Los símbolos de Christoffel que aquí figuran son los de la métrica euclidiana osculatriz asociada a la representación, y son iguales a los valores para $y^i = y^i_0$ de los símbolos de Christoffel calculados a partir de la métrica de Riemann.

Suprimiendo ahora los ubíndices 0, vemos que si se escribe

$$\omega^i_h = \left\{ {}_k{}^i{}_h \right\} dy^k = \Gamma_k{}^i{}_h \, dy^k, \tag{5-15}$$

la diferencial absoluta del vector $\vec{v}$ en M tiene como componentes contravariantes:

$$\nabla v^i = dv^i + \omega^i_h v^h. \tag{5-16}$$

De igual modo que en la geometría euclidiana, las cantidades

$$\nabla_k v^i = \partial_k v^i + \Gamma_k{}^i{}_h v^h, \tag{5-17}$$

donde las $\Gamma_k{}^i{}_h$ están dadas mediante los símbolos de Christoffel relativos a la métrica de Riemann,

son las componentes de un tensor denominado *derivada covariante* del vector $\vec{v}$. También se demostraría que, si el campo de vectores está definido por sus componentes covariantes v_i, su diferencial absoluta tiene las siguientes componentes covariantes:

$$\nabla v_i = \partial v_i - \omega_i^h v_h.$$

y que las correspondientes componentes de la derivada covariante se escriben:

$$\nabla_k v_i = \partial_k v_i - \Gamma^h_{ki} v_h.$$

Convendremos en decir que dos vectores de orígenes M y M′ infinitamente próximos son *equipolentes* si sus vectores imágenes en una representación de segundo orden son equipolentes; la diferencial absoluta ∇v^i correspondiente al paso del primer vector al segundo es nula en este caso.

De manera análoga se extendería a la geometría de Riemann la validez de las fórmulas que dan la diferencial absoluta o la derivada covariante de un tensor cualquiera. En resumen: las representaciones de segundo orden y la métrica euclidiana osculatriz son conceptos que permiten extender a los espacios riemannianos las nociones del análisis tensorial euclidiano relativo a los tensores ligados a dos puntos infinitamente próximos. Esto se cumple en particular para todos los operadores diferenciales que hemos estudiado. Importa, sin embargo, observar que, en el caso de vectores, mientras en la geometría euclidiana el

vector diferencial absoluto es una diferencial exacta de otro vector, que satisface las condiciones ordinarias de integrabilidad, no hay razón alguna para que esto se verifique también en la geometría de Riemann.

5-6. Vector aceleración de un punto móvil en V_n. Geodésicas.—Al igual que en el espacio euclidiano, consideremos en V_n un punto móvil M función de un parámetro t que interpretaremos como la variable tiempo. El vector velocidad $\vec{v}$ de M tendrá por componentes contravariantes:

$$v^i = \frac{dy^i}{dt}$$

En cuanto al vector aceleración $\vec{\gamma}$, admitirá las componentes contravariantes:

$$\gamma^i = \frac{\nabla v^i}{dt} = \frac{d^2y^i}{dt^2} + \Gamma_k{}^i{}_h \frac{dy^h}{dt}\frac{dy^k}{dt} \qquad [5\text{-}18]$$

Si la aceleración del movimiento de M es nula, su trayectoria se denomina *geodésica del espacio riemanniano* V_n. Tales curvas quedan definidas paramétricamente, cualquiera que sea el parámetro t, por las soluciones del sistema diferencial:

$$\frac{d^2y^i}{dt^2} + \Gamma_k{}^i{}_h \frac{dy^h}{dt}\frac{dy^k}{dt} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad [5\text{-}19]$$

Adoptemos como variable independiente a lo largo de una geodésica C la abscisa curvilínea s

de un punto M de esta curva, contada sobre ella a partir de un punto fijo. El vector $\vec{u}$, de componentes:

$$u^i = \frac{dy^i}{ds},$$

es unitario y colineal con $\vec{dM}$: es el vector unitario tangente a la curva. Las geodésicas están caracterizadas por las ecuaciones:

$$\frac{\nabla u^i}{ds} \equiv \frac{dy^k}{ds} \nabla_k u^i \equiv u^k \nabla_k u^i = 0, \tag{5-20}$$

las cuales expresan que *el vector $\vec{u}$ se conserva equipolente a sí mismo cuando se pasa de un punto de C a otro infinitamente próximo. Las geodésicas constituyen, pues, la extensión a la geometría riemanniana de las rectas del espacio euclidiano.*

Ahora bien: en $\mathcal{E}_n$ las rectas están caracterizadas por la propiedad de extremar la longitud del arco $\widehat{AB}$ respecto a las curvas que unen los puntos A y B. Cabe entonces preguntarse si esta propiedad se verifica también para las geodésicas en la geometría de Riemann. Para mayor sencillez razonaremos sobre un espacio propiamente riemanniano.

Consideremos una representación paramétrica de un arco de curva que une dos puntos A y B de V_n. Si a y b designan los valores del parámetro t correspondientes a los puntos A y B, la longitud

del arco $\widehat{AB}$ está dada, según sabemos, por la integral:

$$\int_a^b \sqrt{f(y'^k, y'^i)}\, dt,$$

en donde:

$$f = g_{ij} y'^i y'^j; \qquad y'^i = \frac{dy^i}{dt}$$

Las curvas que hacen extrema esta integral —o *curvas extremales*— están definidas por el correspondiente sistema de ecuaciones de Euler del cálculo de variaciones:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\sqrt{f}}{\partial y'^i}\right) - \frac{\partial\sqrt{f}}{\partial y^i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Efectuando las derivaciones, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial y'^i}\right] - \frac{1}{\sqrt{f}}\frac{\partial f}{\partial y^i} = 0;$$

o sea,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{1}{2f}\frac{df}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'^i} = 0. \tag{5-21}$$

Como el significado del parámetro t es arbitrario, lo identificamos con el arco s, o abscisa curvilínea sobre las curvas consideradas; en tales condiciones, tenemos:

$$y'^i = \frac{dy^i}{ds}; \quad f = g_{ij} y'^i y'^j = 1, \tag{5-22}$$

y, conociéndose una integral primera $f = 1$, el sistema diferencial [5-21] se reduce a

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial f}{\partial y'^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} = 0. \qquad [5\text{-}23]$$

es decir, al sistema de ecuaciones de Euler para la función f. De [5-22] se deduce:

$$\frac{\partial f}{\partial y'^i} = 2g_{ij}y'^j; \qquad \frac{\partial f}{\partial y^i} = \partial_i g_{jk} y'^j y'^k.$$

y obtenemos para [5-23] la forma explícita:

$$\frac{d}{ds}(g_{ij}y'^j) - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk} y'^j y'^k = g_{ij}\frac{dy'^j}{ds}$$

$$+ \left(\partial_k g_{ij} - \frac{1}{2}\partial_i g_{jk}\right) y'^j y'^k = 0. \qquad [5\text{-}24]$$

de donde, introduciendo los símbolos de Christoffel de primera especie, resulta:

$$g_{ij}\frac{dy'^j}{ds} + [jk, i]\, y'^j y'^k = 0. \qquad [5\text{-}25]$$

Mediante multiplicación contracta por g^{ih} se llega al sistema:

$$\frac{d^2y^h}{ds^2} + \Gamma^h_{jk}\frac{dy^j}{ds}\frac{dy^k}{ds} = 0,$$

que coincide con el sistema diferencial de geodésicas [5-19] para $t = s$. Se obtiene así el teorema:

TEOREMA.—*En geometría riemanniana, las geodésicas son las extremales de la integral que expresa la longitud del arco de curva que une dos puntos fijos de* V_n.

METRICA EUCLIDIANA DE APLICABILIDAD

5-7. Desarrollo sobre el espacio euclidiano de una curva de V_n.—Definamos en V_n una curva cualquiera C mediante una representación paramétrica. Las coordenadas (y^i) de un punto M de C son funciones de un parámetro t. Designaremos por A un punto fijo de C; p. ej., el que corresponde al valor $t = 0$ del parámetro.

A cada punto M de C hacemos corresponder en el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ un punto m y un sistema $(m, \vec{e}_i)$ de la forma siguiente:

1) Al punto A corresponde un punto a elegido arbitrariamente y un sistema de referencia $[a, (\vec{e}_i)_a]$, indeterminado en orientación, pero perfectamente definido en forma y magnitud por las relaciones:

$$(\vec{e}_i)_a\,(\vec{e}_j)_a = (g_{ij})_a, \qquad [5\text{-}26]$$

en donde las $(g_{ij})_a$ designan los coeficientes de la métrica riemanniana en el punto A ($t = 0$).

2) El punto m y los vectores $\vec{e}_i$ satisfacen al sistema diferencial:

$$\frac{d\vec{m}}{dt} = \frac{dy^i}{dt}\vec{e}_i; \qquad \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \left(\Gamma^h_{ki}\right)_M \frac{dy^k}{dt}\vec{e}_h, \qquad [5\text{-}27]$$

en el cual las $(\Gamma^k_{hi})_M$ son los valores de los símbolos de Christoffel en el punto M, siendo, por consiguiente, funciones del único parámetro t.

La integración del sistema diferencial [5-27], con las condiciones iniciales impuestas, hace efectivamente corresponder a cada valor de t y, por tanto, a cada punto M de C, un punto m y un sistema de referencia $(m, \vec{e}_i)$. El lugar γ de m cuando M describe C se llama *desarrollo* o *carta* de C sobre el espacio euclidiano. Si se modifican las condiciones iniciales establecidas en 1), ello equivale a efectuar un desplazamiento arbitrario del sistema de referencia inicial $[a, (\vec{e}_i)_0]$ y, en consecuencia, otro desplazamiento de γ. Así pues, la carta γ se halla definida sobre $\mathcal{E}_n$ salvo un desplazamiento arbitrario.

En la teoría elemental de superficies se obtiene un ejemplo de carta si procedemos de la manera siguiente. Sea una curva C trazada sobre una superficie S y consideremos la desarrollable circunscrita a S a lo largo de C. Si esta desarrollable se aplica sobre un plano, se deduce de C, considerada como trazada sobre dicha desarrollable, otra curva γ que cabe considerar como una carta plana de C.

5-8. Métrica euclidiana de aplicabilidad a lo largo de una curva.—Con relación al desarrollo γ de C existe el siguiente teorema fundamental:

TEOREMA.—*Es posible encontrar en $\mathcal{E}_n$ una métrica tal que los valores numéricos tomados a lo largo de γ por sus coeficientes y derivadas primeras*

coinciden con los valores numéricos que toman en los puntos homólogos de C los coeficientes de la métrica riemanniana y sus derivadas primeras. Dicho de otra forma: es posible construir una métrica euclidiana que sea osculatriz de la métrica riemanniana en todos los puntos de C.

Para simplificar las notaciones, efectuemos sobre las coordenadas de V_n un cambio de coordenadas tal que C venga definido por las ecuaciones

$$y^1 = y^2 = \dots = y^{n-1} = 0,$$

y adoptemos como parámetro t la variable y^n. Convendrá ahora introducir índices griegos que tomen sólo los valores $1, 2, \dots, n-1$, en tanto que los índices latinos seguirán tomando todos los valores $1, 2, \dots, n$. Con estas convenciones, el sistema diferencial [5-27] adquiere la forma

$$\frac{d\vec{m}}{dy^n} = \vec{e}_n; \qquad \frac{d\vec{e}_i}{dy^n} = \left(\Gamma^h_{ni}\right)_{y^\lambda = 0} \vec{e}_h \qquad [5\text{-}28]$$

y determina el desarrollo γ de C.

Supongamos que a todo punto P de un entorno de M en V_n hacemos corresponder un punto p de otro entorno de m en $\mathcal{E}_n$, de la forma siguiente: si el punto P admite las coordenadas (y^i), el punto m será aquel punto de γ de parámetro y^n, y el punto p está definido por la relación:

$$\vec{mp} = y^\lambda \vec{e}_\lambda + \left[\frac{1}{2} \left(\Gamma^i_{\lambda\mu}\right)_{y^\nu = 0} y^\lambda y^\mu + \Psi^i_{(3)}(y^\lambda)\right] \vec{e}_i \qquad [5\text{-}29]$$

en donde las $\Psi^i_{(3)}$ están restringidas a ser de tercer grado respecto a las y^λ.

Según la fórmula [5-29], el punto p se halla definido en $\mathcal{E}_n$ como función de n variables escalares (y^i), de donde resulta que éstas constituyen un sistema de coordenadas curvilíneas para $\mathcal{E}_n$, en el entorno de γ. Para este sistema de coordenadas curvilíneas, el sistema natural de referencia en m $(y^n = 0)$ está definido, según [5-28] y [5-29], por los vectores:

$$\left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial y^{\lambda}}\right)_{y^n=0} = \vec{e}_{\lambda} \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial \vec{p}}{\partial y^n}\right)_{y^n=0} = \frac{d\vec{m}}{dy^n} = \vec{e}_n;$$

es decir, coincide con el sistema $(m, \vec{e}_i)$ obtenido en el desarrollo. La métrica de $\mathcal{E}_n$ en el sistema de coordenadas (y^i) admite, pues, como coeficientes en m los productos escalares $\vec{e}_i\,\vec{e}_j$. Según [5-27] o [5-28], las cantidades $\vec{e}_i\,\vec{e}_j$ satisfacen, cuando M describe C, al sistema diferencial:

$$d(\vec{e}_i\vec{e}_j) = [(\Gamma_k{}^h{}_i)_M\,(\vec{e}_j\vec{e}_h) + (\Gamma_k{}^h{}_j)_M\,(\vec{e}_i\,\vec{e}_h)]dy^k. \qquad [5\text{-}30]$$

Por otra parte, según la propia definición de los símbolos de Christoffel, los coeficientes g_{ij} de la métrica riemanniana son tales que

$$dg_{ij} = (\Gamma_{kij} + \Gamma_{kji})\,dy^k;$$

es decir, satisfacen al sistema diferencial:

$$dg_{ij} = [(\Gamma_k{}^h{}_i)_M g_{jh} + (\Gamma_k{}^h{}_j)_M g_{ih}]\,dy^k. \qquad [5\text{-}31]$$

Así, las cantidades $\vec{e}_i\,\vec{e}_j$ y g_{ij} satisfacen, cuando M describe C, al mismo sistema diferencial; pero, ya que según [5-26] las condiciones iniciales en A son las mismas, resulta que

$$\vec{e}_i\vec{e}_j = g_{ij}$$

se verifica idénticamente cuando M describe C. La métrica euclidiana y la métrica riemanniana son, por tanto, tangentes en todos los puntos de C.

Para probar que son también osculatrices, basta establecer que las cantidades $(\Gamma_i{}^h{}_j)_{y^n=0}$ son asimismo los valores de los símbolos de Christoffel sobre γ para la métrica euclidiana. Estos símbolos son los coeficientes de $\vec{e}_h$ en $\dfrac{\partial^2 \vec{p}}{\partial y^i\,\partial y^j}$. Ahora bien: según [5-29],

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial y^i\,\partial y^{\lambda}}\right)_{y^n=0} = (\Gamma_i{}^h{}_{\lambda})_{y^n=0}\,\vec{e}_h.$$

y en virtud de [5-28],

$$\left(\frac{\partial^2 \vec{p}}{\partial y^i \partial y^n}\right)_{y^n=0} = \frac{d}{dy^n}\left(\frac{\partial \vec{p}}{dy^i}\right)_{y^n=0} = \frac{d\vec{e}_i}{dy^n} = (\Gamma_n{}^h{}_i)_{y^n=0}\,\vec{e}_h,$$

lo que demuestra el teorema. La métrica euclidiana obtenida recibe el nombre de *métrica euclidiana de aplicabilidad* a lo largo de C.

5-9. Aplicaciones geométricas.—De las nociones de desarrollo de una curva y de métrica euclidiana de aplicabilidad se deducen numerosas con-

sideraciones geométricas. Nos limitaremos a señalar algunas de ellas.

Sea C una geodésica del espacio riemanniano V_n. A cada punto M de C se encuentra ligado el vector unitario $\vec{u}$ tangente a C y, cuando se pasa del punto M a otro punto infinitamente próximo sobre C, la diferencial absoluta de $\vec{u}$ es nula. Como esta última diferencial es igual a la del vector imagen en $\mathcal{E}_n$ en una representación de segundo orden del entorno de M (p. ej., la que nos da una métrica euclidiana de aplicabilidad), resulta que el vector imagen no es otro que el vector unitario tangente a la curva γ desarrollo de C. Resulta de todo ello que la curva γ es una recta de $\mathcal{E}_n$.

TEOREMA.—*Las geodésicas de un espacio riemanniano son las curvas cuyo desarrollo sobre el espacio euclidiano son líneas rectas.*

De este teorema se deduce fácilmente, por vía puramente geométrica, que las geodésicas de un espacio riemanniano son las curvas que extreman la longitud del arco que une dos puntos fijos. Nos limitaremos a señalar la posibilidad de esta demostración geométrica.

Sea ahora una curva cualquiera C de V_n, y supongamos que a cada punto M de C se encuentra ligado un vector $\vec{v}(M)$ que varía de manera continua cuando M describe C. La diferencial absoluta de $\vec{v}$ al pasar del punto M a otro punto infinitamente próximo sobre C es igual a la diferencia geométrica entre los dos vectores imágenes

en $\mathcal{E}_n$ para la representación asociada a una métrica euclidiana de aplicabilidad. Esto nos induce a medir la *variación geométrica finita* del vector $\vec{v}(M)$, cuando se pasa de un punto A a otro B a lo largo de C, mediante la diferencia de los vectores imágenes de $\vec{v}(A)$ y $\vec{v}(B)$, es decir, de los vectores que admiten, respectivamente, las mismas componentes que $\vec{v}(A)$ y $\vec{v}(B)$ respecto a los sistemas de referencia asociados a los puntos A y B en el desarrollo.

Supongamos que se da en V_n un campo de vectores $\vec{v}(M)$ y dos puntos A y B. La variación geométrica finita del vector del campo, cuando se pasa de A a B, es, en virtud de la definición precedente, esencialmente *relativa al camino* C por el cual se va desde A hasta B.

TENSOR DE CURVATURA DE UN ESPACIO RIEMANNIANO

5-10. Desarrollo de un casiparalelogramo.—En el estudio del espacio euclidiano en coordenadas curvilíneas, hemos señalado que la condición para que una forma diferencial cuadrática defina una métrica euclidiana es que se satisfagan las condiciones de integrabilidad relativas a los vectores $\vec{e}_i$ del sistema natural de referencia. En la geometría de Riemann no se satisfacen en general dichas condiciones y vamos a escribir sus primeros miem-

bros e interpretarlos geométricamente siguiendo un método debido a E. Cartan.

Para calcular las derivadas segundas de una función escalar o vectorial de las variables (y^i) hay que efectuar dos derivaciones, de las cuales en una solo varía la variable y^i y en la otra únicamente lo hace la y^j. Vamos a generalizar este proceso introduciendo dos *símbolos de diferenciación intercambiables.*

Partiendo de valores cualesquiera de las variables (y^i), introduzcamos variaciones arbitrarias (dy^i); diremos que estas variaciones definen un símbolo de diferenciación d. Sea, análogamente, (δy^i) un segundo sistema de variaciones arbitrarias que definen otro símbolo de diferenciación δ. A partir de los valores $y^i + dy^i$ de las variables, efectuemos la diferenciación δ; se obtienen así los valores:

$$y^i + dy^i + \delta y^i + \delta dy^i. \qquad [5\text{-}32]$$

Si, partiendo ahora de los valores $y^i + \delta y^i$ se efectúa la diferenciación d, se llega a

$$y^i + \delta y^i + dy^i + d\delta y^i. \qquad [5\text{-}33]$$

Estos dos sistemas de valores coincidirán si se conviene en que

$$d\delta y^i = \delta dy^i. \qquad [5\text{-}34]$$

Diremos en tal caso que los dos símbolos de diferenciación son intercambiables para las funciones escalares o, más brevemente, que son *intercambiables.*

Si $f(y^i)$ designa una función dos veces diferenciable de las y^i, se tiene:

$$\delta f = \partial_i f \, \delta y^i,$$

y también,

$$d\delta f = \partial_{ij} f \, \delta y^i dy^j + \partial_i f \, d\delta y^i.$$

A causa de la simetría de las derivadas segundas y de [5-34], resulta:

$$d\delta f = \delta d f. \qquad [5\text{-}35]$$

De aquí se deduce, en particular, que la propiedad de permutación de ambos símbolos de diferenciación subsiste cuando se efectúa un cambio cualquiera de las variables (y^i).

Consideremos dos símbolos de diferenciación permutables y, a partir del punto M de V_n de coordenadas (y^i), efectuemos la diferenciación d, que hace pasar de M a $M + d\vec{M}$ $(y^i + dy^i)$, y la δ, por la que se pasa de M a $M + \delta\vec{M}$ $(y^i + \delta y^i)$. Supondremos además que $d\vec{M}$ y $\delta\vec{M}$ no son colineales, es decir, que las dy^i y δy^i no son proporcionales. A partir de $M + d\vec{M}$ efectuemos la diferenciación δ, que hace pasar al punto M′ de coordenadas [5-32]. Por la propiedad de intercambiabilidad de d y δ llegaríamos al mismo punto M′ si efectuásemos la diferenciación partiendo de $M + \delta\vec{M}$,

puesto que las coordenadas del punto obtenido serían [5-33], que coinciden con [5-32]. El contorno cerrado así definido por los cuatro puntos $(M, M + \vec{dM}, M', M + \vec{\delta M})$ se llamará un *casiparalelogramo.*

Nos proponemos ahora desarrollar sobre el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ los dos caminos del casiparalelogramo que permiten pasar de M a M'. Al punto M de $\mathcal{E}_n$ le corresponde un sistema de referencia $(m, \vec{e_i})$ definido salvo un desplazamiento. Si se efectúa primero la diferenciación d y después la δ, habremos de desarrollar los lados $(M, M + \vec{dM})$ y $(M + \vec{dM}, M')$ del casiparalelogramo. Se pasará del sistema $(m, \vec{e_i})$ al $(m + \vec{dm}, \vec{e_i} + \vec{de_i})$ definido, en virtud de [5-27], por las ecuaciones

$$\vec{dm} = dy^i\vec{e_i}; \qquad \vec{de_i} = \omega_i^h(d)\vec{e_h}. \qquad [5\text{-}35']$$

en donde $\omega_i^h(d)$ designa la forma diferencial ω_i^h tomada para las dy^i. El desarrollo del lado $(M + \vec{dM}, M')$ hace pasar ahora del sistema $(m + \vec{dm}, \vec{e_i} + \vec{de_i})$ al $[m_1, (\vec{e'_i})_1]$, con:

$$\begin{cases} \vec{mm'_1} = \vec{dm} + \vec{\delta m} + \vec{\delta dm} \\ (\vec{e'_i})_1 - \vec{e_i} = \vec{de_i} + \vec{\delta e_i} + \vec{\delta de_i}. \end{cases}$$

Si se permuta el orden de ambas diferenciaciones, se pasará primero del sistema $(m, \vec{e_i})$ al $(m + \vec{\delta m}, \vec{e_i} + \vec{\delta e_i})$, con:

$$\vec{\delta m} = \delta y^i\vec{e_i}; \qquad \vec{\delta e_i} = \omega_i^h(\delta)\vec{e_h}; \qquad [5\text{-}36]$$

después, de este sistema al $[m'_2, (\vec{e'_i})_2]$, con

$$\begin{cases} \vec{mm'_2} = \vec{\delta m} + \vec{dm} + \vec{d\delta m} \\ (\vec{e'_i})_2 - \vec{e_i} = \vec{\delta e_i} + \vec{de_i} + \vec{d\delta e_i}. \end{cases}$$

Por consiguiente, será posible pasar del sistema $[m'_1, (\vec{e'_i})_1]$ al $[m'_2, (\vec{e'_i})_2]$ mediante las fórmulas:

$$\vec{m'_1m'_2} = \vec{d\delta m} - \vec{\delta dm}; \qquad [5\text{-}37]$$

$$(\vec{e'_i})_2 - (\vec{e'_i})_1 = \vec{d\delta e_i} - \vec{\delta de_i}. \qquad [5\text{-}38]$$

de las cuales vamos a hacer el cálculo efectivo de los segundos miembros. Tenemos, en primer lugar,

$$\vec{d\delta m} - \vec{\delta dm} = d(\delta y^i\vec{e_i}) - \delta(dy^i\vec{e_i}) = \delta y^i\vec{de_i} - dy^i\vec{\delta e_i};$$

o sea, según [5-35] y [5-36]:

$$\vec{d\delta m} - \vec{\delta dm} = (\Gamma_k{}^h{}_i dy^k\delta y^i - \Gamma_k{}^h{}_i dy^i\delta y^k)\vec{e_h}.$$

De aquí se deduce, intercambiando en el último término del segundo miembro los índices i y k:

$$\vec{d\delta m} - \vec{\delta dm} = (\Gamma_k{}^h{}_i - \Gamma_i{}^h{}_k)\, dy^k\delta y^i\vec{e_h} = 0, \qquad [5\text{-}39]$$

dada la simetría de los símbolos de Christoffel respecto a los dos índices inferiores. Así, ambos desarrollos conducen al mismo origen m' para el sistema de referencia final. La razón fundamental para ello estriba en que los símbolos de Christoffel se han determinado de manera que se satisfagan las condiciones de integrabilidad para los puntos.

Comparemos ahora los vectores de los dos sistemas de origen m', y se tiene:

$$\begin{aligned} d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i &= d[\omega_i^h(\delta)\vec{e}_h] - \delta[\omega_i^h(d)\vec{e}_h] \\ &= [d\omega_i^h(\delta) - \delta\omega_i^h(d)]\vec{e}_h + \omega_i^k(\delta)d\vec{e}_k - \omega_i^k(d)\delta\vec{e}_k; \end{aligned}$$

o sea, según [5-35] y [5-36]:

$$d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i = [d\omega_i^h(\delta) - \delta\omega_i^h(d) + \omega_i^k(\delta)\omega_k^h(d) - \omega_i^k(d)\omega_k^h(\delta)]\vec{e}_h$$

Adoptaremos la notación:

$$d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i = \Omega_i^h\vec{e}_h. \qquad [5\text{-}40]$$

en la que

$$\Omega_i^h = d\omega_i^h(\delta) - \delta\omega_i^h(d) + \omega_i^l(\delta)\omega_l^h(d) - \omega_i^l(d)\omega_l^h(\delta). \qquad [5\text{-}41]$$

Para una métrica riemanniana arbitraria, las cantidades Ω_i^h son, en general, diferentes de cero y los sistemas de referencia finales asociados a los dos desarrollos poseen distinta orientación, pero tienen la misma forma y magnitud, ya que los productos escalares dos a dos de los vectores de tales sistemas están dados por los valores en M' de los coeficientes de la métrica. Las Ω_i^h definen,

pues, la rotación alrededor de m' que hace pasar de un sistema de referencia al otro.

Es importante tener presente que las cantidades Ω_i^h son las componentes de un tensor. A un cambio de coordenadas curvilíneas corresponde el cambio de sistema de referencia definido por

$$\vec{e}_i = A_i^{j'}\vec{e}_{j'},$$

de donde se deduce:

$$\delta\vec{e}_i = A_i^{j'}\delta\vec{e}_{j'} + \delta A_i^{j'}\vec{e}_{j'},$$

y también:

$$d\delta\vec{e}_i = A_i^{j'}d\delta\vec{e}_{j'} + dA_i^{j'}\delta\vec{e}_{j'} + \delta A_i^{j'}d\vec{e}_{j'} + d\delta A_i^{j'}\vec{e}_{j'}.$$

Intercambiando los dos símbolos de diferenciación y restando miembro a miembro, por ser permutables d y δ delante de las $A_i^{j'}$, se tiene:

$$d\delta\vec{e}_i - \delta d\vec{e}_i = A_i^{j'}(d\delta\vec{e}_{j'} - \delta d\vec{e}_{j'});$$

o sea, introduciendo las Ω_i^h definidas por [5-40]:

$$\Omega_i^h\vec{e}_h = A_i^{j'}\,\Omega_{j'}^{i'}\vec{e}_{i'} = A_i^{j'}A_{i'}^h\Omega_{j'}^{i'}\vec{e}_h.$$

Identificando los coeficientes de $\vec{e}_h$ en ambos miembros, se obtiene la ley de transformación tensorial:

$$\Omega_i^h = A_i^{j'}A_{i'}^h\Omega_{j'}^{i'};$$

es decir:

TEOREMA.—*Las cantidades Ω_i^h son las componentes mixtas de un tensor.*

5-11. El tensor de Riemann-Christoffel.—Es fácil demostrar que las cantidades Ω_i^h son formas bilineales respecto a las dy^r y δy^s, y tampoco presenta dificultades especiales el cálculo de los coeficientes de esas formas valiéndose de los símbolos de Christoffel. Tenemos en primer lugar:

$$d\omega_i^h(\delta) = d(\Gamma_s{}^h{}_i\delta y^s) = \partial_r\Gamma_s{}^h{}_i dy^r\delta y^s + \Gamma_s{}^h{}_i d\delta y^s$$

y, por consiguiente,

$$d\omega_i^h(\delta) + \delta\omega_i^h(d) = \partial_r\Gamma_s{}^h{}_i dy^r\delta y^s - \partial_r\Gamma_s{}^h{}_i\delta y^r dy^s,$$

y, si se cambian los índices r y s en el segundo término del segundo miembro:

$$d\omega_i^h(\delta) - \delta\omega_i^h(d) = (\partial_r\Gamma_s{}^h{}_i - \partial_s\Gamma_r{}^h{}_i)dy^r\delta y^s.$$

Por otra parte,

$$\omega_i^l(\delta)\omega_l^h(d) - \omega_i^l(d)\omega_l^h(\delta) = (\Gamma_s{}^l{}_i\Gamma_r{}^h{}_l - \Gamma_r{}^l{}_i\Gamma_s{}^h{}_l)dy^r\delta y^s.$$

Se deduce de todo ello que las Ω_i^h son expresables mediante las formas bilineales:

$$\Omega_i^h = R_i{}^h{}_{,rs}\, dy^r\delta y^s. \qquad [5\text{-}42]$$

en donde se ha puesto:

$$R_i{}^h{}_{,rs} = \partial_r\Gamma_s{}^h{}_i - \partial_s\Gamma_r{}^h{}_i + \Gamma_r{}^h{}_l\Gamma_s{}^l{}_i - \Gamma_s{}^h{}_l\Gamma_r{}^l{}_i. \qquad [5\text{-}43]$$

Siendo las dy^r y δy^s las componentes contravariantes de dos vectores arbitrarios y las Ω_i^h las componentes de un tensor, resulta que las cantidades [5-43] definen un campo de tensores sobre V_n. Al tensor $R_i{}^h{}_{,rs}$, que es antisimétrico respecto a los índices r y s, se le da el nombre de *tensor de Riemann-Christoffel* o *tensor de curvatura* del espacio riemanniano V_n. La curvatura de un espacio riemanniano se manifiesta así por el hecho de que si se desarrollan sobre el espacio euclidiano, a partir del mismo sistema de referencia inicial, dos caminos distintos que tengan los mismos extremos, los sistemas de referencia finales tienen distinta orientación.

De las consideraciones precedentes se deduce que las condiciones de integrabilidad de los vectores se expresan por medio de las ecuaciones:

$$R_i{}^h{}_{,rs} = 0. \qquad [5\text{-}44]$$

Dada una forma diferencial cuadrática arbitraria, para que se pueda considerar como la métrica de un espacio euclidiano, es necesario que se satisfagan las condiciones [5-44]. Se demuestra que si la variedad correspondiente es topológicamente equivalente al espacio euclidiano, dichas condiciones son también suficientes para que V_n sea euclidiano. Cuando no ocurre así, el espacio riemanniano V_n, para el cual se satisfacen las condiciones [5-44], se denomina *localmente euclidiano*; en lo que concierne a sus propiedades puramente locales, tal espacio no difiere de un espacio euclidiano.

5-12. Las componentes covariantes del tensor de Riemann-Christoffel.—Para efectuar de manera

sencilla el cálculo de las componentes covariantes del tensor de curvatura, haremos la siguiente convención, que es puramente algorítmica: llamaremos índice *mudo* y lo escribiremos entre paréntesis, a todo índice sobre el cual no deba actuar el operador ∇_r de derivación covariante; con este convenio se escribirá:

$$\nabla_r \Gamma_{(i}{}^{h}{}_{s)} = \partial_r \Gamma_i{}^h{}_s + \Gamma_r{}^h{}_l \Gamma_i{}^l{}_s.$$

y, por consiguiente,

$$R_i{}^h{}_{,rs} = \nabla_r \Gamma_{(i}{}^{h}{}_{s)} - \nabla_s \Gamma_{(i}{}^{h}{}_{r)}.$$

De aquí se deduce, en virtud del teorema de Ricci, que

$$R_{ij,rs} = g_{jh} R_i{}^h{}_{,rs} = \nabla_r [g_{jh} \Gamma_{(i}{}^{h}{}_{s)}] - \nabla_s [g_{jh} \Gamma_{(i}{}^{h}{}_{r)}];$$

o sea, que

$$R_{ij,rs} = \nabla_r \Gamma_{(i)j(s)} - \nabla_s \Gamma_{(i)j(r)}.$$

Si se escriben en forma explícita los dos términos del segundo miembro, se tiene:

$$R_{ij,rs} = \partial_r \Gamma_{ijs} - \partial_s \Gamma_{ijr} - \Gamma_r{}^l{}_j \Gamma_{ils} + \Gamma_s{}^l{}_j \Gamma_{ilr}. \quad [5\text{-}45]$$

Las derivadas segundas de las g_{ij} sólo figuran en los primeros términos del segundo miembro de [5-45]; vamos a ver en qué forma intervienen en la expresión $R_{ij,rs}$. Se tiene:

$$\partial_r \Gamma_{ijs} = \partial_r [is, j] = \frac{1}{2} \partial_r (\partial_s g_{ij} + \partial_i g_{js} - \partial_j g_{is}),$$

$$\partial_s \Gamma_{ijr} = \partial_s [ir, j] = \frac{1}{2} \partial_s (\partial_r g_{ij} + \partial_i g_{jr} - \partial_j g_{ir}).$$

de donde, restando:

$$R_{ij,rs} = \frac{1}{2} (\partial_{ir} g_{js} + \partial_{js} g_{ir} - \partial_{jr} g_{is} - \partial_{is} g_{jr}) - g^{lm} (\Gamma_{rmj} \Gamma_{ils} - \Gamma_{smj} \Gamma_{ilr}). \quad [5\text{-}46]$$

En las fórmulas [5-46] se observan ciertas simetrías que aparecerán aún más claras si se utiliza un sistema de coordenadas convenientemente elegido.

5-13. Coordenadas normales. Relaciones entre las componentes del tensor de curvatura.— Dado un punto M de V_n efectuemos sobre las variables (y^i) un cambio de coordenadas para pasar a las variables (z^i), tal que en una representación de segundo orden el espacio euclidiano $\mathcal{E}_n$ se encuentre referido al sistema de coordenadas rectilíneas asociado al sistema natural de referencia $(m, \vec{e}_i)$ ligado a M y a las (y^i). Los sistemas naturales en M para las (y^i) y las (z^i) coinciden y, por tanto, coinciden también las componentes en ambos sistemas de coordenadas de un mismo tensor ligado a M. Por otra parte, la métrica euclidiana osculatriz correspondiente a las variables (z^i) tiene coeficientes constantes, de tal suerte que los símbolos de Christoffel relativos a dichas coordenadas se anulan todos en el punto M. El sistema (z^i) se denomina sistema de *coordenadas normales* relativas a M y asociadas a las coordenadas (y^i). Resulta utilísimo el empleo de tales coordenadas normales en geometría riemanniana, pues evitan cálculos laboriosos. Vamos a aplicarlas para poner

de manifiesto ciertas relaciones entre las componentes del tensor de Riemann-Christoffel.

Respecto al sistema de coordenadas normales relativas a M y asociadas a las coordenadas (y^i), las componentes covariantes en M del tensor de curvatura (que tienen los mismos valores en ambos sistemas de coordenadas) están dadas por [5-46], en donde se han anulado los símbolos de Christoffel; o sea:

$$R_{ij,\,rs} = \frac{1}{2}(\partial_{ir}g_{js} + \partial_{js}g_{ir} - \partial_{jr}g_{is} - \partial_{is}g_{jr}). \qquad [5\text{-}47]$$

habiendo calculado las cantidades que figuran en el segundo miembro respecto a las coordenadas normales. Se deduce que, en cualquier sistema de coordenadas, se tienen las relaciones:

$$R_{ij,\,rs} = R_{rs,\,ij}; \qquad [5\text{-}48]$$

$$R_{ij,\,rs} = -R_{ij,\,sr} = -R_{ji,\,rs}. \qquad [5\text{-}49]$$

Por otra parte, y por permutación circular de los índices j, r, s, se obtiene:

$$R_{ir,\,sj} = \frac{1}{2}(\partial_{is}g_{jr} + \partial_{jr}g_{is} - \partial_{rs}g_{ij} - \partial_{ij}g_{rs}).$$

$$R_{is,\,jr} = \frac{1}{2}(\partial_{ij}g_{rs} + \partial_{rs}g_{ij} - \partial_{js}g_{ir} - \partial_{ir}g_{js}).$$

y, sumando,

$$R_{ij,\,rs} + R_{ir,\,sj} + R_{is,\,jr} = 0. \qquad [5\text{-}50]$$

Se demuestra que [5-49] y [5-50] forman un sistema completo de identidades para las componentes del tensor de Riemann-Christoffel. Cualquier

identidad entre las componentes de $R_{ij,\,rs}$ se satisface por un conjunto de números $R_{ij,\,rs}$ sometido únicamente a las condiciones [5-49] y [5-50]. Toda otra identidad será consecuencia algebraica de [5-49] y [5-50] y así lo es, en particular, la [5-48].

5-14. Derivadas segundas covariantes de un vector.—Dado un campo de vectores por sus componentes contravariantes v^h, tratemos de calcular la diferencia entre $\nabla_r(\nabla_s v^h)$ y $\nabla_s(\nabla_r v^h)$. En el espacio euclidiano, esta diferencia es nula, mientras que en el riemanniano estará ligada a la curvatura del espacio. Razonemos en un sistema de coordenadas normales relativas a un punto cualquiera M de V_n. En todo punto de V_n, se tiene:

$$\nabla_s v^h = \partial_s v^h + \Gamma_s{}^h{}_i v^i.$$

Como las coordenadas son normales en M, se anularán en este punto los símbolos de Christoffel, por lo que se tiene en M:

$$\nabla_r(\nabla_s v^h) = \partial_{rs} v^h + \partial_r \Gamma_s{}^h{}_i v^i.$$

de donde se deduce que en el punto M,

$$\nabla_r(\nabla_s v^h) - \nabla_s(\nabla_r v^h) = (\partial_r \Gamma_s{}^h{}_i - \partial_s \Gamma_r{}^h{}_i)v^i.$$

Ahora bien: en el sistema de coordenadas considerado, en virtud de [5-43], se tiene para el punto M:

$$R_i{}^h{}_{,\,rs} = \partial_r \Gamma_s{}^h{}_i - \partial_s \Gamma_r{}^h{}_i$$

de donde resulta la identidad:

$$\nabla_r(\nabla_s v^h) - \nabla_s(\nabla_r v^h) = R_i{}^h{}_{,rs} v^i. \qquad [5\text{-}51]$$

Como los dos miembros de esta identidad son tensores, resulta que es válida en todo punto de V_n y cualquiera que sea el sistema de coordenadas. Se hubiera podido utilizar la identidad [5-51], establecida directamente, para introducir el tensor de Riemann-Christoffel; por un proceso equivalente se introdujo por primera vez el tensor de curvatura.

5-15. El tensor de Ricci.—Surge la cuestión de si es posible deducir por contracción de índices nuevos tensores a partir del tensor de Riemann-Christoffel. Como las componentes $R_{ij,rs}$ son por una parte antisimétricas respecto a i y j, y a r y a s, por otra, resulta que la contracción de i con j o la de r con s dan tensores idénticamente nulos.

Hagamos la contracción de un índice del primer grupo con otro del segundo; p. ej., los índices segundo y tercero. Se obtiene así el tensor:

$$R_{ij} = R_i{}^h{}_{,hj}, \qquad [5\text{-}52]$$

el cual es evidentemente *simétrico* respecto a los índices i y j, ya que

$$R_{ij} = g^{hk} R_{ik,hj} = g^{hk} R_{hj,ik} = g^{hk} R_{jh,ki} = R_{ji}.$$

Si se hace la contracción de un índice cualquiera del primer grupo con otro también cualquiera del segundo, se obtiene siempre ya sea el tensor R_{ij} o bien el opuesto, porque en virtud de [5-49],

$$g^{hk} R_{ki,jh} = g^{hk} R_{ik,hj} = R_{ij},$$

y

$$g^{hk} R_{ik,jh} = g^{hk} R_{ki,hj} = -g^{hk} R_{ik,hj} = -R_{ij}.$$

Al tensor simétrico R_{ij}, *que desempeña un papel fundamental en la teoría relativista de la gravitación, se le da el nombre de tensor de Ricci.* De [5-43] y [5-52] se deduce inmediatamente la expresión explícita del tensor de Ricci:

$$R_{ij} = \partial_h \Gamma_i{}^h{}_j - \partial_j \Gamma_h{}^h{}_i + \Gamma_h{}^h{}_l \Gamma_i{}^l{}_j - \Gamma_i{}^l{}_h \Gamma_j{}^h{}_l \qquad [5\text{-}53]$$

Del tensor de Ricci resulta por contracción un invariante,

$$R = R_i{}^i = g^{ij} R_{ij}, \qquad [5\text{-}54]$$

el cual se denomina *curvatura riemanniana escalar* del espacio V_n. En un espacio riemanniano de dos dimensiones como el representado por una superficie ordinaria, determinada salvo una deformación arbitraria, la curvatura riemanniana escalar no difiere de la que, en teoría elemental de las superficies, se llama curvatura total. Por otra parte, es sabido que dicha curvatura total depende exclusivamente del ds^2 de la superficie.

5-16. Las identidades de Bianchi.—Entre las componentes $\nabla_l R_{ij,rs}$ del tensor derivado del tensor de curvatura existen otras identidades,

además de las deducidas derivando [5-49] y [5-50]. Estas importantes relaciones reciben el nombre de *identidades de Bianchi*.

Para establecerlas, adoptaremos un sistema de coordenadas normales relativas a un punto M arbitrario de V_n. Los símbolos de Christoffel son entonces nulos en M y, de [5-43], se deduce por derivación que en el punto M,

$$\nabla_t R_i{}^h{}_{.rs} = \partial_{rt}\Gamma_s{}^h{}_i - \partial_{st}\Gamma_r{}^h{}_i. \qquad [5\text{-}55]$$

Por permutación circular de los índices r, s y t, se obtiene:

$$\nabla_r R_i{}^h{}_{.st} = \partial_{sr}\Gamma_t{}^h{}_i - \partial_{tr}\Gamma_s{}^h{}_i,$$
$$\nabla_s R_i{}^h{}_{.tr} = \partial_{ts}\Gamma_r{}^h{}_i - \partial_{rs}\Gamma_t{}^h{}_i,$$

y de aquí, por adición, resultan las identidades:

$$\nabla_r R_i{}^h{}_{.st} + \nabla_s R_i{}^h{}_{.tr} + \nabla_t R_i{}^h{}_{.rs} = 0, \qquad [5\text{-}56]$$

las cuales, debido a su forma tensorial, son válidas en cualquier sistema de coordenadas y en todo punto de V_n. Las identidades [5-56] son las que hemos llamado *identidades de Bianchi*.

Por doble contracción, se deduce una consecuencia importante relativa al tensor de Ricci. Para $t = h$, resulta:

$$-\nabla_r R_{is} + \nabla_s R_{ir} + \nabla_h R_i{}^h{}_{.rs} = 0;$$

y por contracción del índice i con el s:

$$-\nabla_r R + \nabla_s R^s{}_r + \nabla_h R^h_r = 0,$$

o sea que

$$2\nabla_s R^s{}_r - \nabla_r R = 0,$$

ecuaciones que, en virtud del teorema de Ricci, se pueden escribir en la forma:

$$\nabla_s(R^s{}_r - \frac{1}{2} g^s{}_r R) = 0. \qquad [5\text{-}57]$$

Por consiguiente, si se introduce el tensor simétrico

$$S_{rs} = R_{rs} - \frac{1}{2} g_{rs} R, \qquad [5\text{-}58]$$

este tensor satisface a las identidades:

$$\nabla_s S^s{}_r = 0, \qquad [5\text{-}59]$$

las cuales son fundamentales en la teoría relativista de la gravitación, en la que sirven para introducir principios de conservación.

PARTE SEGUNDA

APLICACIONES

CAPITULO VI

EL CALCULO TENSORIAL Y LA DINAMICA CLASICA

DINAMICA DE LOS SISTEMAS HOLONOMOS CON LIGADURAS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

6-1. El espacio de configuración como espacio riemanniano.—Consideremos un sistema dinámico S con ligaduras holónomas, perfectas e independientes del tiempo, y con n grados de libertad. El conjunto de las configuraciones de tal sistema constituye una variedad diferenciable de n dimensiones, que se llama la variedad o *el espacio de configuración*. Designaremos por $(q^1, q^2, \ldots, q^n)$ un sistema de parámetros para S, es decir, un sistema de coordenadas para el espacio de configuración. En estas hipótesis, la fuerza viva, 2T, del sistema S es una forma cuadrática definida positiva con relación a las derivadas de las q^i respecto al tiempo:

$$2T = a_{ij}q'^i q'^j \qquad \left(q'^i = \frac{dq^i}{dt}\right). \qquad [6\text{-}1]$$

en donde las a_{ij} son funciones de los parámetros q^k. Podemos asociar de manera intrínseca al sistema dinámico S el espacio propiamente riemanniano V_n,

definido por el espacio de configuración dotado de la métrica:

$$ds^2 = 2T\,dt^2;$$

o sea, en el sistema de parámetros antes mencionado:

$$ds^2 = a_{ij}dq^i dq^j. \qquad [6\text{-}2]$$

A toda configuración del sistema corresponde un punto M bien determinado del espacio de configuración, de tal modo que a todo movimiento del sistema queda asociado el movimiento de un punto M en el espacio riemanniano V_n. Nos proponemos traducir la dinámica del sistema S en una dinámica del punto en un espacio de Riemann.

6-2. Cinemática del movimiento de M.—Vamos en primer lugar a completar las consideraciones cinemáticas esbozadas en el capítulo V

El vector velocidad $\vec{v}$ del punto M, de coordenadas variables q^i, tiene como componentes contravariantes:

$$v^i = \frac{dq^i}{dt} = q'^i$$

Por consiguiente, las componentes covariantes de este vector vendrán dadas por

$$v_i = a_{ij}q'^j = \frac{\partial T}{\partial q'^i} \qquad [6\text{-}3]$$

Así que los *momentos* p_i, que aparecen constantemente en dinámica analítica, son precisamente

las *componentes covariantes del vector velocidad* del punto representativo M en el espacio riemanniano V_n. Designemos por $\vec{u}$ el vector unitario tangente a la trayectoria C de M, el cual admite las componentes:

$$u^i = \frac{dq^i}{ds},$$

de donde se tiene:

$$\vec{v} = v\vec{u}; \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

y la magnitud del vector velocidad estará dada por

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2T. \qquad [6\text{-}4]$$

Pasemos al vector aceleración; como el vector $\vec{u}$ es unitario, su diferencial absoluta, cuando M describe C, es perpendicular a $\vec{u}$ y, por consiguiente, podemos escribir:

$$\frac{\nabla u^i}{ds} = \frac{n^i}{\rho}, \qquad [6\text{-}5]$$

en donde las n^i designan las componentes de un vector unitario $\vec{n}$ normal a $\vec{u}$, y ρ es un escalar positivo; $\vec{n}$ se llamará vector normal principal de C, y ρ^{-1}, curvatura de C en V_n. La fórmula [6-5] aparece como generalización de la primera fórmula

de Frenet de la teoría elemental de curvas. De

$$v^i = vu^i,$$

por derivación respecto al tiempo, se deduce:

$$\gamma^i = \frac{\nabla(vu^i)}{dt} = \frac{dv}{dt} u^i + v \frac{\nabla u^i}{ds} \frac{ds}{dt},$$

o sea, que

$$\gamma^i = \frac{dv}{dt} u^i + \frac{v^2}{\rho} n^i, \qquad [6\text{-}6]$$

con lo que el vector aceleración $\vec{\gamma}$ se descompone en una aceleración tangencial y una aceleración normal, dadas por las mismas fórmulas que en la mecánica clásica.

6-3. Las ecuaciones de la dinámica.—Designemos por

$$Q_i dq^i$$

el trabajo elemental de las fuerzas dadas, aplicadas a S, para un desplazamiento virtual arbitrario. Este trabajo elemental es invariante respecto a cualquier cambio de parámetros, de tal modo que las Q_i son las componentes covariantes de un vector de V_n, el cual se llama *vector fuerza generalizada*. El movimiento queda entonces determinado por las ecuaciones de Lagrange:

$$P_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'^i} - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i. \qquad [6\text{-}7]$$

Vamos ahora a interpretar los primeros miembros P_i de estas ecuaciones. Se tiene:

$$\frac{\partial T}{\partial q'^i} = a_{ij} q'^j; \qquad \frac{\partial T}{\partial q^i} = \frac{1}{2} \partial_i a_{jk} q'^j q'^k,$$

con lo que resulta para las P_i la forma explícita:

$$P_i = \frac{d}{dt} (a_{ij} q'^j) - \frac{1}{2} \partial_i a_{jk} q'^j q'^k. \qquad [6\text{-}8]$$

Por otra parte, mediante un cálculo idéntico al de la sección 5-6, se ve que el segundo miembro de [6-8] es igual a

$$a_{ij} \frac{dq'^j}{dt} + [jk,i]\, q'^j q'^k,$$

en donde los símbolos de Christoffel se refieren a las a_{ij}, y se deduce que

$$P_i = a_{ij} \frac{\nabla v^j}{dt} = \frac{\nabla v_i}{dt} = \gamma_i. \qquad [6\text{-}9]$$

Así que los primeros miembros P_i de las ecuaciones de Lagrange son sencillamente *las componentes covariantes del vector aceleración* de M, y las ecuaciones de Lagrange se escriben:

$$\gamma_i = Q_i. \qquad [6\text{-}10]$$

Las ecuaciones del movimiento de M se obtienen, por tanto, igualando el vector aceleración al vector fuerza generalizada; es decir, escribiendo para M

una generalización exacta de la ecuación fundamental de la dinámica puntual, bajo el supuesto de que el punto M tiene masa igual a la unidad.

En virtud de [6-6], las ecuaciones del movimiento se pueden también escribir en la forma:

$$\frac{dv}{dt} u_i + \frac{v^2}{\rho} n_i = Q_i, \qquad [6\text{-}11]$$

de donde resulta que, durante el movimiento, el vector fuerza generalizada permanece coplanario con la tangente a la trayectoria y con la normal principal de la misma.

Si el movimiento de S se produce sin que existan fuerzas aplicadas, es decir, si las Q_i son nulas, el punto M tiene en V_n un movimiento de aceleración nula, lo que entraña las condiciones:

$$\frac{dv}{dt} = 0 ; \qquad \frac{1}{\rho} = 0.$$

Así que los movimientos de S sin fuerzas aplicadas están representados por movimientos uniformes de M a lo largo de *geodésicas* del espacio V_n.

6-4. La integral de las fuerzas vivas.—Supongamos que el sistema S admite una *función de fuerzas* U *independiente del tiempo;* o sea, que el vector fuerza generalizada Q_i es el gradiente de una función U de los parámetros q^i:

$$Q_i = \partial_i U.$$

Multipliquemos escalarmente los dos miembros de [6-11] por el vector $\vec{v}$ de componentes $v^i = v u^i$; a causa de la ortogonalidad de $\vec{v}$ y $\vec{n}$, se tiene:

$$v \frac{dv}{dt} = \partial_i U \frac{dq^i}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

de donde resulta que las ecuaciones del movimiento admiten la siguiente integral primera, que generaliza la integral de las fuerzas vivas de la dinámica puntual:

$$\frac{1}{2} v^2 - U = h \qquad (h = \text{constante}), \qquad [6\text{-}12]$$

la cual, según [5-46], es, precisamente, la integral de las fuerzas vivas para el sistema S. Obsérvese el sencillo carácter geométrico de la demostración así obtenida.

6-5. El principio de Maupertuis.—Conservemos las hipótesis que en la sección precedente nos han permitido obtener la integral de las fuerzas vivas, y fijemos para lo sucesivo el valor de la constante arbitraria *h* que figura en la función U. De este modo es fácil obtener de nuevo e interpretar geométricamente el principio de Maupertuis, que constituye una generalización del resultado establecido para los movimientos sin fuerzas.

Consideremos una representación paramétrica del movimiento de M, en la cual las coordenadas q^i

y el tiempo t estén expresados en función de un parámetro τ cualquiera. Supondremos conocida la función que liga t con τ, y pondremos:

$$\frac{d\tau}{dt} = \mathrm{F}. \qquad [6\text{-}13]$$

Formemos el sistema diferencial que determina las funciones $q^i(\tau)$; se tiene:

$$q'^i = \frac{dq^i}{dt} = \mathrm{F}\,\frac{dq^i}{d\tau}.$$

y las cantidades P_i se pueden escribir:

$$\mathrm{P}_i = \mathrm{F}\left[\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{F}a_{ij}\frac{dq^j}{d\tau}\right) - \frac{\mathrm{F}}{2}\partial_i a_{jk}\frac{dq^j}{d\tau}\frac{dq^k}{d\tau}\right]$$

de donde se deduce que la trayectoria C de M está representada mediante el parámetro τ por las soluciones del sistema diferencial:

$$\frac{d}{d\tau}\left(\mathrm{F}a_{ij}\frac{dq^j}{d\tau}\right) - \frac{\mathrm{F}}{2}\partial_i a_{jk}\frac{dq^j}{d\tau}\frac{dq^k}{d\tau} = \frac{\partial_i \mathrm{U}}{\mathrm{F}} \qquad [6\text{-}14]$$

La forma del primer miembro de [6-14] recuerda el primer miembro de las ecuaciones de las extremales de

$$\sigma = \int \sqrt{\mathrm{F}a_{ij}dq^i dq^j}, \qquad [6\text{-}15]$$

en donde F se considerará como función de las q^i. Supongamos, pues, que F sea una función

conocida de las q^i y busquemos las extremales de [6-15], es decir, las geodésicas de la métrica riemanniana:

$$d\sigma^2 = \mathrm{F}ds^2 = \mathrm{F}a_{ij}dq^i dq^j. \qquad [6\text{-}16]$$

Como parámetro sobre estas geodésicas adoptaremos el propio arco σ, y, para simplificar las notaciones, escribiremos:

$$q^i = \frac{dq^i}{d\sigma}$$

De [5-24] se deduce que las ecuaciones diferenciales de estas geodésicas pueden escribirse en la forma:

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathrm{F}a_{ij}q^j) - \frac{1}{2}\partial_i(\mathrm{F}a_{jk})q^j q^k = 0,$$

o sea,

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathrm{F}a_{ij}q^j) - \frac{\mathrm{F}}{2}\partial_i a_{jk}q^j q^k = \frac{1}{2}\partial_i\mathrm{F}a_{jk}q^j q^k. \qquad [6\text{-}17]$$

De [6-16] se deduce que

$$\mathrm{F}a_{jk}q^j q^k = 1,$$

y, por consiguiente, [6-17] se escribirá:

$$\frac{d}{d\sigma}(\mathrm{F}a_{ij}q^j) - \frac{\mathrm{F}}{2}\partial_i a_{jk}q^j q^k = \frac{1}{2}\frac{\partial_i\mathrm{F}}{\mathrm{F}} \qquad [6\text{-}18]$$

Para identificar, en la medida de lo posible, [6-14] con [6-18] tendremos que poner:

$$\partial_i\mathrm{F} = 2\partial_i\mathrm{U}\,; \qquad \mathrm{F} = 2\mathrm{U} + \text{constante}.$$

Entre todas las trayectorias, soluciones de [6-14], consideremos las asociadas a movimientos que correspondan a un valor determinado h de la constante de las fuerzas vivas:

$$2T = 2(U + h) \qquad [6\text{-}19]$$

y hagamos:

$$F = 2\,(U + h). \qquad [6\text{-}20]$$

Sobre estas trayectorias está perfectamente determinado el parámetro τ (salvo una constante aditiva) y, con ayuda de [6-16], es posible también definir sobre las mismas otro parámetro σ tal que

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma}{ds}\frac{ds}{dt} = \sqrt{F.\,2T}\,;$$

o sea, en virtud de [6-19],

$$\frac{d\sigma}{dt} = F = \frac{d\tau}{dt}$$

Los parámetros τ y σ no difieren, pues, entre sí, y las trayectorias consideradas satisfacen al sistema diferencial [6-18]; esto es, son las geodésicas de la métrica riemanniana:

$$d\sigma^2 = 2(U + h)a_{ij}dq^i dq^j.$$

Principio de Maupertuis.—*En las mismas hipótesis que para la integral de las fuerzas vivas, las trayectorias de un sistema dinámico, correspondientes a un valor determinado de la constante* h *de*

las fuerzas vivas, son las geodésicas del espacio de configuración para la métrica riemanniana:

$$d\sigma^2 = 2(U + h)ds^2 = 2(U + h)a_{ij}dq^i dq^j. \qquad [6\text{-}21]$$

La ley según la cual son recorridas estas geodésicas en el transcurso del tiempo, viene dada por la relación:

$$\frac{d\sigma}{dt} = 2(U + h). \qquad [6\text{-}22]$$

6-6. Algunas aplicaciones.—La introducción de los espacios de Riemann asociados a los espacios de configuración permite obtener una imagen geométrica de todo problema dinámico de los sistemas holónomos con ligaduras independientes del tiempo, resultando posible aplicar a tales problemas las técnicas del cálculo tensorial. Efectivamente, el empleo de los métodos tensoriales a la dinámica analítica ha permitido dar solución a cierto número de problemas que no había sido posible resolver con los métodos de la dinámica analítica pura. Así ocurre en particular con el problema de *la transformación de las ecuaciones de la dinámica*, propuesto por Painlevé y Levi-Civita, y que puede enunciarse de la manera siguiente: Hállense las condiciones para que dos sistemas dinámicos S y S′, que admiten el mismo espacio de configuración, tengan las mismas trayectorias, con independencia de la ley de recorrido de esas trayectorias en función del tiempo [1].

[1] Painlevé: «Sur la transformation des équations de la dynamique», *Journ. de Math.*, 1894.—Levi-Civita: «Sulle tras-

La discusión de la *estabilidad* de los movimientos de un sistema dinámico se efectúa de manera más cómoda razonando sobre el espacio de configuración V_n dotado de la métrica $ds^2 = 2T\,dt^2$, y empleando un método análogo al de la desviación geodésica de Levi-Civita[1]. Los resultados de esta discusión hacen intervenir de manera sencilla el tensor de curvatura de V_n.

Señalemos, finalmente, el estudio de los *sistemas dinámicos descomponibles*[2]; un sistema dinámico se llama descomponible si, para cierta elección de los parámetros q^i, su fuerza viva 2T puede considerarse como la suma de las fuerzas vivas de dos sistemas con r y $n - r$ grados de libertad:

$$2T_1 = \sum_{1}^{r} a_{\alpha\beta}(q^1, \ldots, q^r)q'^\alpha q'^\beta; \quad 2T_2 = \sum_{r+1}^{n} b_{\alpha\beta}(q^{r+1}, \ldots, q^n)q'^\alpha q'^\beta,$$

siendo a su vez descomponible la función de fuerzas U en la suma de dos funciones de fuerzas:

$$U_1(q^1, \ldots, q^r), \qquad U_2(q^{r+1}, \ldots, q^n).$$

Dado un sistema dinámico S, referido a parámetros cualesquiera $(q^{i'})$, se trata de encontrar en qué condiciones es posible hallar otro sistema de parámetros (q^i) para el cual pueda hacerse la descomposición.

La solución explícita de estos diversos problemas rebasa con mucho los límites impuestos a este libro, por lo que el lector interesado deberá consultar las memorias originales. Señalaremos aquí que, en cierta medida, las consideraciones expuestas en las secciones precedentes son susceptibles de extenderse a la dinámica de los sistemas no holónomos con ligaduras independientes del tiempo[1].

formazioni delle equazioni dinamiche», *Ann. di Mat.*, 1896.—THOMAS, T. Y.: «On the transformation of the equations of dynamics», *Journ. of Math. Phys.*, 1946.—LICHNEROWICZ: «Sur la transformation des équations de la dynamique», *C. R. Acad. Sc.*, 1946.

[1] LEVI-CIVITA: «Sur l'écart géodésique», *Math. Ann.*, 1926.—SYNGE: «On the geometry of dynamics», *Trans. Roy. Soc. London*, 1926.

[2] STACKEL, *C. R. Acad. Sc.*, 1895.—THOMAS, T. Y.: «Reducible Dynamical Systems», *Journ. of Math. Phys.*, 1947.

DINAMICA DE LOS SISTEMAS HOLONOMOS CON LIGADURAS DEPENDIENTES DEL TIEMPO

6-7. El espacio-tiempo de configuración.—Consideremos un sistema dinámico Σ con ligaduras holónomas perfectas, funciones del tiempo, y con n grados de libertad. Como las ligaduras dependen del tiempo, las configuraciones posibles del sistema dependerán del instante considerado. Nos vemos, por tanto, obligados a sustituir el espacio de configuración por el *espacio-tiempo de configuración*, es decir, por una variedad de $n + 1$ dimensiones, V_{n+1}, para la cual los parámetros q^i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ del sistema y el tiempo $t = q^0$ constituyen un sistema de coordenadas. Este sistema de coordenadas resulta, por otra parte, privilegiado en el sentido de que no admitiremos

[1] Véase, p. ej., la memoria citada de Synge.

en V_{n+1} otros cambios de coordenadas que los del tipo:

$$q^{i'} = f^{i'}(q^0, q^i)\,; \qquad q^{0'} = q^0 + \varphi(q^i)$$

(i, i' y todo índice latino $= 1, 2, \ldots, n$).

Será cómodo escribir:

$$q'^{\alpha} = \frac{dq^{\alpha}}{dt} \text{ (α y todo índice griego $= 0, 1, 2, \ldots, n$)}$$

de tal modo que

$$q'^0 = 1\,; \qquad q'^i = \frac{dq^i}{dt}$$

Con estas notaciones, la fuerza viva de Σ se puede escribir:

$$2T = a_{\alpha\beta}q'^{\alpha}q'^{\beta}. \qquad [6\text{-}23]$$

en donde las $a_{\alpha\beta}$ son funciones de las q^{α}. Asociaremos al sistema dinámico Σ el espacio de Riemann V_{n+1}, definido por el espacio-tiempo de configuración provisto de la métrica:

$$ds^2 = 2T dt^2 = a_{\alpha\beta}dq^{\alpha}dq^{\beta}. \qquad [6\text{-}24]$$

A toda configuración del sistema para un instante t corresponde un punto M bien determinado del espacio-tiempo de configuración. A todo movimiento del sistema resulta asociado en el espacio riemanniano V_{n+1}, el movimiento del punto M, el cual queda definido dando las n coordenadas q^i en función de la $n+1$ coordenada $q^0 = t$.

El vector velocidad de M tiene como componentes contravariantes las $v^{\alpha} = q'^{\alpha}$ y, como componentes covariantes,

$$v_{\alpha} = a_{\alpha\beta}q'^{\beta} = \frac{\partial T}{\partial q'^{\alpha}}$$

Las n componentes v_i son, por tanto, iguales a los momentos p_i del sistema Σ. En cuanto al vector aceleración $\vec{\gamma}$, admite las componentes covariantes:

$$\gamma_{\alpha} = a_{\alpha\beta}\frac{\nabla v^{\beta}}{dt} = a_{\alpha\beta}q''^{\beta} + [\beta\gamma, \alpha]q'^{\beta}q'^{\gamma}. \qquad [6\text{-}25]$$

Se observará que $q''^0 = 0$, y, en particular, de [6-25], se tiene:

$$\gamma_0 = a_{0i}q''^i + [jk, 0]q'^j q'^k + \partial_i a_{00}q'^i + \frac{1}{2}\partial_0 a_{00}. \qquad [6\text{-}26]$$

6-8. Las ecuaciones de la dinámica.—Designemos nuevamente por

$$Q_i\, dq^i$$

el trabajo elemental de las fuerzas dadas, aplicadas a Σ, en un desplazamiento virtual arbitrario. El movimiento de Σ está determinado por las ecuaciones de Lagrange:

$$P_i \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'^i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^i} = Q_i. \qquad [6\text{-}27]$$

Multiplicando por q'^i y sumando, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(q'^i\frac{\partial T}{\partial q'^i}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q'^i}q''^i + \frac{\partial T}{\partial q^i}q'^i\right) = Q_i q'^i.$$

y, en virtud de la identidad de Euler para las funciones homogéneas,

$$q'^i \frac{\partial T}{\partial q'^i} + q'^0 \frac{\partial T}{\partial q'^0} = 2T$$

y también:

$$\frac{\partial T}{\partial q'^i} q''^i + \frac{\partial T}{\partial q^i} q'^i = \frac{dT}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q^0}.$$

de donde se deduce la relación:

$$P_0 \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'^0}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^0} = \frac{dT}{dt} - Q_i q'^i. \qquad [6\text{-}28]$$

que no es otra que la expresión en forma diferencial del teorema generalizado de las fuerzas vivas.

Visto esto, propongámonos interpretar los primeros miembros P_α de las ecuaciones [6-27] y [6-28]. Se tiene, como en la sección 6-3:

$$P_\alpha = a_{\alpha\beta} q''^\beta + [\beta\gamma, \alpha] q'^\beta q'^\gamma,$$

o bien:

$$P_\alpha = \gamma_\alpha.$$

con lo que las ecuaciones de Lagrange [6-27] se escriben:

$$\gamma_i = Q_i, \qquad [6\text{-}29]$$

en tanto que la ecuación [6-28] toma la forma:

$$\gamma_0 = \frac{dT}{dt} - Q_i q'^i. \qquad [6\text{-}30]$$

Las relaciones [6-29] y [6-30] son las *ecuaciones del movimiento* de M en V_{n+1}. Si el movimiento de S se produce sin fuerzas aplicadas, las n componentes γ_i de la aceleración de M son nulas, pero γ_0 es en general diferente de cero y las trayectorias correspondientes de M en V_{n+1} no admiten una interpretación geométrica sencilla.

6-9. Caso en que existe una función de fuerzas.— Supongamos que las fuerzas dadas aplicadas a Σ derivan de una función de fuerzas U $(q^0, q^1, \ldots, q^n)$ que puede contener explícitamente al tiempo. Se sabe que introduciendo la lagrangiana,

$$L = T + U,$$

del sistema, las ecuaciones del movimiento de Σ se pueden escribir:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0.$$

En este caso resulta cómodo sustituir la métrica $ds^2 = 2T\, dt^2$ por la

$$d\sigma^2 = 2L\,dt^2. \qquad [6\text{-}31]$$

Haciendo intervenir la función U en el coeficiente a_{00}, escribiremos:

$$2L = a_{\alpha\beta} q'^\alpha q'^\beta,$$

de suerte que

$$d\sigma^2 = a_{\alpha\beta} dq^\alpha\, dq^\beta.$$

Con esta nueva métrica subsisten todas las fórmulas establecidas en las secciones 6-7 y 6-8, a condición de reemplazar T por L, y las Q_i, por cero. Se tiene entonces:

$$\gamma_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q'^i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^i},$$

y las ecuaciones del movimiento del punto representativo M en el espacio V_{n+1}, dotado de la métrica [6-31], se escriben:

$$\gamma_i = 0\,; \qquad \gamma_0 = \frac{dL}{dt} \qquad [6\text{-}32]$$

6-10. El teorema de Eisenhart.—Eisenhart ha dado una interpretación geométrica sencilla de las ecuaciones [6-32], gracias a la introducción de una métrica riemanniana de $n + 2$ dimensiones. Designando con $u = q^{n+1}$ un parámetro suplementario, consideremos la métrica impropiamente riemanniana definida por

$$d\tau^2 = 2L\,dt^2 + 2\,dt\,du; \qquad [6\text{-}33]$$

o sea,

$$d\tau^2 = a_{ij}dq^i dq^j + 2a_{i0}dq^i dq^0 + a_{00}(dq^0)^2 + 2dq^0 dq^{n+1}. \quad [6\text{-}34]$$

Entre las geodésicas de esa métrica, las hay reales y de longitud nula, es decir, tales que $d\tau^2 = 0$. Con objeto de simplificar lo más posible, prescindiremos en lo sucesivo de considerar tales

geodésicas. Si la métrica [6-34] se escribe en la forma:

$$d\tau^2 = a_{AB}dq^A dq^B \qquad (A, B, \text{etc...} = 0, 1, 2, ..., n + 1).$$

con

$$a_{0\,\overline{n+1}} = 1\,; \qquad a_{i\,\overline{n+1}} = a_{\overline{n+1}\,\overline{n+1}} = 0,$$

el sistema diferencial de las geodésicas [6-34] se puede expresar en la forma:

$$a_{AB}\frac{d^2q^B}{d\tau^2} + [BC, A]\frac{dq^B}{d\tau}\frac{dq^C}{d\tau} = 0. \qquad [6\text{-}35]$$

Para $A = n + 1$, se tiene:

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} = 0, \qquad \frac{dt}{d\tau} = a \qquad (a = \text{constante}). \qquad [6\text{-}36]$$

De [6-33] y [6-36] se deduce:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - L = \frac{1}{2a^2} - L, \qquad [6\text{-}37]$$

y por integración:

$$u = \frac{t}{2a^2} - \int_0^t L\,dt + b \qquad (b = \text{constante}). \qquad [6\text{-}38]$$

Con todo esto, el sistema diferencial [6-35] se escribirá:

$$a_{AB}\frac{d^2q^B}{dt^2} + [BC, A]\frac{dq^B}{dt}\frac{dq^C}{dt} = 0.$$

Para $A = i$, se tiene:

$$\gamma_i = 0,$$

y para $A = 0$,

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \gamma_0 = 0;$$

o sea, según [6-37],

$$\gamma_0 = \frac{dL}{dt},$$

volviéndose a encontrar las relaciones [6-32], las cuales no son otras que las ecuaciones del movimiento del sistema Σ. Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales, se deduce el teorema siguiente [1]:

TEOREMA DE EISENHART.—*Todo movimiento de un sistema holónomo Σ, que admite una función de fuerzas, se puede obtener de la manera siguiente: se considera la métrica [6-33] y la geodésica de esta métrica que corresponde a las condiciones iniciales del movimiento de Σ, completadas por*

$$u_0 = b \qquad \left(\frac{du}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2a^2} - (L)_0,$$

en donde a y b designan dos constantes cualesquiera. A lo largo de dicha geodésica, las q^i son funciones de t que definen el movimiento considerado.

[1] EISENHART: «Dynamical trajectories and geodesics», *Ann. of Math.*, 1929.

De otra forma: cabe considerar las trayectorias del punto representativo M en V_{n+1} como las proyecciones en el espacio-tiempo de configuración de las geodésicas de [6-33] a lo largo de las líneas coordenadas relativas al parámetro u. La relación [6-38] muestra cómo está ligada la variable u a la acción hamiltoniana del sistema. Señalemos finalmente que gracias al teorema de Eisenhart resulta posible interpretar de manera especialmente sencilla el teorema clásico de Hamilton-Jacobi de la dinámica analítica.

DINAMICA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

6-11. Los medios continuos.—Nos proponemos indicar en la última parte de este capítulo algunas aplicaciones del cálculo tensorial a la dinámica de los medios continuos, la cual comprende tanto la hidrodinámica de fluidos cualesquiera como el estudio de la deformación de un sólido (teoría de la elasticidad). Históricamente, la noción de tensor se debe a los trabajos de Voigt sobre la deformación de los medios cristalinos, y de la teoría de la elasticidad surgió precisamente su nombre. Entre todas las teorías *clásicas* es quizá ésta donde mayor número de resultados útiles ha suministrado el cálculo tensorial, gracias a la fácil introducción de coordenadas curvilíneas, especialmente adaptadas a los problemas físicos estudiados [1]. En fin, las ecuaciones generales de los medios continuos que

[1] Para esta cuestión, véase BRILLOUIN, L.: *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*, Masson, 1938.

vamos a establecer son muy importantes debido al uso que Einstein ha hecho de ellas en la teoría de la relatividad generalizada.

Desde el punto de vista *microscópico* de la física moderna, todo medio se compone de partículas; pero cabe la posibilidad de situarnos en un punto de vista *macroscópico* y describir el comportamiento de un medio continuo (fluido o cuerpo elástico) fijando la atención no sobre sus partículas individuales, sino sobre un pequeño volumen del mismo. En el transcurso del tiempo, las partículas entran y salen de tal elemento de volumen obedeciendo cada una de ellas a las leyes generales de la dinámica. Pero es importante formular estas leyes en un lenguaje en el que no intervengan las posiciones ni las velocidades de las masas elementales. El elemento de volumen considerado deberá contener entonces un número suficientemente grande de partículas que nos permita calcular los valores medios necesarios. Suponiendo el espacio referido a tres coordenadas curvilíneas cualesquiera y^1, y^2, y^3, supongamos también que se ha definido una ley de densidad de materia ρ y un vector velocidad $\vec{v}$ en el punto $M(y^i)$ y en el instante t. Las cantidades y^1, y^2, y^3, t se denominan variables de Euler.

6-12. Derivadas parcial y total respecto al tiempo.—Consideremos una característica local cualquiera q del medio continuo (un escalar tal como ρ, o una componente de un vector tal como $\vec{v}$, etc.) y

tratemos de describir su evolución con el tiempo. Esto puede entenderse de dos maneras: o bien estudiamos su evolución con el tiempo en un punto fijo $M(y^i)$ y entonces la derivada de q será la derivada *parcial* respecto al tiempo,

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{\partial q}{\partial t}\right)_{y^i = \text{constante}}, \qquad [6\text{-}39]$$

o bien podemos referir esta evolución a un sistema de coordenadas ligado localmente al movimiento medio de la materia y seguir así la variación de q en dicho movimiento. En tal caso obtendremos la derivada *total* respecto al tiempo:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial y^1}\frac{dy^1}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y^2}\frac{dy^2}{dt} + \frac{\partial q}{\partial y^3}\frac{dy^3}{dt};$$

o sea, introduciendo las componentes contravariantes

$$v^i = \frac{dy^i}{dt}$$

del vector $\vec{v}$ y utilizando las notaciones habituales para las derivadas parciales,

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + v^i \partial_i q. \qquad [6\text{-}40]$$

Si q es un escalar, [6-40] se podrá escribir en la forma vectorial:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{v}\ \vec{\text{grad.}}\ q. \qquad [6\text{-}41]$$

6-13. Ecuación de continuidad.—Los dos elementos puramente cinéticos introducidos, ρ y $\vec{v}$, no son independientes, ya que la variación de densidad de un elemento de volumen viene dada por el flujo de materia que atraviesa la superficie límite de dicho elemento de volumen. Se llega así a la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div.}\ (\overrightarrow{\rho v}) = 0, \qquad [6\text{-}42]$$

o, en forma tensorial general,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i(\rho v^i) = 0; \qquad [6\text{-}43]$$

la derivación covariante corresponde al espacio euclidiano de tres dimensiones referido a las coordenadas curvilíneas (y^i). Para la demostración de [6-42], el lector puede consultar la excelente obra de M. Bricard [1].

6-14. Fuerzas de masa y fuerzas superficiales.—Para pasar a la dinámica de los medios continuos necesitamos analizar las fuerzas que se ejercen sobre los elementos del medio considerado. Imaginemos trazada en este una superficie cerrada S y estudiemos las fuerzas exteriores aplicadas a la porción V del medio limitada por S. Estas fuerzas pueden clasificarse en dos categorías:

[1] BRICARD: *Le Calcul Vectoriel*, Collection Armand Colin, págs. 159, 160.

1.ª *Fuerzas de masa.*—Son las fuerzas que actúan sobre los diferentes elementos de volumen de V. Elijamos en V un elemento diferencial dV, de masa $dm = \rho dV$. Las fuerzas consideradas ejercidas sobre este elemento de volumen son del orden de dm, o sea, del de dV; designaremos su resultante por:

$$\vec{f}\, dV,$$

en donde $\vec{f}$ es la fuerza de masa por unidad de volumen.

2.ª *Fuerzas superficiales.*—Son las fuerzas ejercidas sobre la superficie S y que proceden de la acción de los elementos del medio contiguos a S hacia el exterior sobre los contiguos a S hacia el interior. Sea dS un elemento de superficie; sobre él actúa una fuerza del orden de dS, que representaremos por

$$-\vec{T}\, dS.$$

Según la propia definicion, esta fuerza sólo depende de la posición del elemento dS en el medio, siendo independiente del resto de la superficie a la cual pertenece. En general será oblicua al elemento de superficie, y si está dirigida hacia el interior se denominará *presión;* en caso contrario se llama *tensión*.

6-15. Tensor de presiones o de tensiones.—Vamos a estudiar cómo varía la fuerza $\vec{T}\, dS$ para las diferentes orientaciones posibles del elemento dS

alrededor de su centro. Con tal objeto refiramos el medio continuo considerado a un sistema de referencia Ox^1, x^2, x^3, formado por tres ejes coordenados rectangulares. Tracemos por un punto cualquiera M del medio tres paralelas a los ejes y llevemos sobre ellas tres segmentos infinitésimos. Se obtiene así un tetraedro elemental MABC, de caras MBC, MCA, MAB y ABC, que designamos, respectivamente, por dS^{23}, dS^{31}, dS^{12} y dS. Si α_1, α_2 y α_3 son las componentes del vector unitario sobre la normal a dS exterior al tetraedro, se tiene:

$$dS^{23} = \alpha_1 dS; \qquad dS^{31} = \alpha_2 dS; \qquad dS^{12} = \alpha_3 dS.$$

La fuerza superficial ejercida sobre ABC sólo difiere en términos de orden superior de la que se ejercería sobre una superficie igual y paralela centrada en M. Por consiguiente, designaremos por $\vec{T}\,dS$ la fuerza superficial ejercida sobre dS por los elementos interiores al tetraedro; en virtud del principio de la igualdad entre acción y reacción, sobre dS se ejercerá una fuerza $-\vec{T}\,dS$ por los elementos exteriores.

El tetraedro se encuentra así sometido a la fuerza de masa, $\vec{f}\,dV$, y a las fuerzas superficiales correspondientes a sus cuatro caras y que representaremos por:

$$\vec{\Theta}_{23}dS^{23}, \quad \vec{\Theta}_{31}dS^{31}, \quad \vec{\Theta}_{12}dS^{12}, \quad -\vec{T}\,dS.$$

Si a estas adjuntamos la fuerza de inercia

$-\vec{\gamma}dm$, correspondiente a la aceleración del punto M del medio, cabe considerar que el tetraedro elemental está en equilibrio bajo la acción de ese torsor de fuerzas. Anulando el vector del torsor, se obtiene:

$$-\vec{T}\,dS + \vec{\Theta}_{23}dS^{23} + \vec{\Theta}_{31}dS^{31} + \vec{\Theta}_{12}dS^{12} + (\vec{f} - \rho\vec{\gamma})dV = 0;$$

o sea, dividiendo por dS:

$$\vec{T} = \alpha_1\vec{\Theta}_{23} + \alpha_2\vec{\Theta}_{31} + \alpha_3\vec{\Theta}_{12} + (\vec{f} - \rho\vec{\gamma})\frac{dV}{dS}$$

Supongamos que la longitud de las aristas del tetraedro tiende a cero, con lo que dV/dS tenderá también a cero y en el límite se tiene:

$$\vec{T} = \alpha_1\vec{\Theta}_{23} + \alpha_2\vec{\Theta}_{31} + \alpha_3\vec{\Theta}_{12}. \qquad [6\text{-}44]$$

Vemos que si dS^{23}, dS^{31}, dS^{12} designan las componentes del bivector que define el área dS, resulta:

$$\vec{T}dS = \vec{\Theta}_{23}dS^{23} + \vec{\Theta}_{31}dS^{31} + \vec{\Theta}_{12}dS^{12}.$$

Así que, en el sistema de coordenadas elegido (x^i), las componentes de la fuerza $\vec{T}\,dS$ son funciones *lineales* de las componentes del bivector que define el elemento de superficie dS. Este resultado es completamente independiente del sistema de coordenadas considerado.

Refiramos ahora el espacio a un sistema de coordenadas curvilíneas cualesquiera (y^i); desig-

nemos por dS^{ij} las componentes contravariantes del bivector que representa al elemento dS, y por $T^l dS$ las correspondientes a la fuerza $\vec{T}dS$. En virtud del resultado que acabamos de enunciar, existirá un sistema de cantidades Θ^l_{ij} tales que:

$$T^l dS = \frac{1}{2}\Theta^l_{ij} dS^{ij}.$$

En lugar del bivector dS^{ij} es cómodo introducir el vector adjunto [1], cuyas componentes covariantes $d\sigma_k$ están definidas por

$$dS^{ij} = \eta^{kij} d\sigma_k. \qquad [6\text{-}45]$$

Se comprueba inmediatamente que $d\sigma_k$ es ortogonal al elemento de superficie dS y tiene la misma medida. Tenemos así:

$$T^l dS = \frac{1}{2}\Theta^l_{ij}\eta^{kij} d\sigma_k,$$

y haciendo:

$$t^{kl} = \frac{1}{2}\Theta^l_{ij}\eta^{kij},$$

se llega a las fórmulas fundamentales:

$$T^l dS = t^{kl} d\sigma_k. \qquad [6\text{-}46]$$

Es claro que las cantidades t^{kl} son las componentes contravariantes de un tensor, puesto que,

[1] Véase la sección 3-23.

cualesquiera que sean los valores numéricos de las componentes covariantes $d\sigma_k$, los primeros miembros de [6-46] son las componentes contravariantes de un vector. Al tensor t^{kl} así definido se le llama *tensor de presiones o de tensiones* del medio continuo considerado.

En la hipótesis de que el medio sea un *fluido perfecto*, el tensor de presiones es de la forma:

$$t^{kl} = p g^{kl}. \qquad [6\text{-}47]$$

donde p es la presión escalar del fluido en el punto y en el instante considerados y donde las g^{kl} son las componentes del tensor fundamental del espacio.

6-16. Las ecuaciones generales de la dinámica de los medios continuos.—Supondremos en todo lo que sigue que las diferentes cantidades consideradas son continuas y tienen derivadas continuas en el espacio.

Imaginemos de nuevo en el medio continuo una superficie cerrada arbitraria S, que limita una porción de volumen V, y escribamos las condiciones clásicas de anulación del torsor constituido por las fuerzas externas relativas a dicha porción del medio y por las fuerzas de inercia. A tal efecto, será cómodo utilizar un sistema de coordenadas rectilíneas ortogonales (x^i), en particular para expresar las condiciones relativas a los momentos.

Sean γ^i las componentes de la aceleración del centro $M(x^i)$ de un elemento de volumen de V; la fuerza elemental de inercia correspondiente tiene

como componentes $-\rho\gamma^i\,dV$. Si $\vec{T}\,dS$ representa la fuerza superficial elemental ejercida por los elementos interiores a S sobre los elementos exteriores, anulando el vector del torsor se tiene:

$$\iiint_V (f^i - \rho\gamma^i)\,dV - \iint_S t^{ki}\,d\sigma_k = C. \qquad [6\text{-}48]$$

y, anulando su momento:

$$\iiint_V [x^i(f^j - \rho\gamma^j) - x^j(f^i - \rho\gamma^i)]\,dV - \iint_S (x^i t^{kj} - x^j t^{ki})\,d\sigma_k = 0. \qquad [6\text{-}49]$$

Transformando mediante la fórmula de Green la integral de superficie que figura en el primer miembro de [6-48], esta ecuación se transforma en:

$$\iiint_V (f^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki})\,dV = 0\,; \qquad [6\text{-}50]$$

y procediendo de modo análogo con la integral de superficie de [6-49], se tiene:

$$\iiint_V [x^i(f^j - \rho\gamma^j - \partial_k t^{kj}) - x^j(f^i - \rho\gamma^i - \partial_k t^{ki})]\,dV -$$

$$\iiint_V (t^{ij} - t^{ji})\,dV = 0. \qquad [6\text{-}51]$$

Como la relación [6-50] se verifica cualquiera que sea el volumen V, de la continuidad del elemento de integración resulta que éste debe ser idénticamente nulo y, por consiguiente,

$$\rho\gamma^i = f^i - \partial_k t^{ki}. \qquad [6\text{-}52]$$

La ecuación [6-51] se reduce entonces a

$$\iiint_V (t^{ij} - t^{ji})\,dV = 0,$$

y el mismo razonamiento precedente muestra que

$$t^{ij} - t^{ji} = 0. \qquad [6\text{-}53]$$

Obtenemos así de las leyes clásicas de la mecánica las fórmulas [6-52] y [6-53]. Las primeras son las ecuaciones generales de la dinámica de los medios continuos; las segundas expresan simplemente que el tensor t^{ij} de tensiones es *simétrico* respecto a sus dos índices. Es ahora fácil escribir las ecuaciones de la dinámica de los medios continuos *en un sistema de coordenadas curvilíneas arbitrarias*. Las ecuaciones

$$\rho\gamma^i = f^i - \nabla_k t^{ki} \qquad [6\text{-}54]$$

son invariantes respecto a cualquier cambio de sistema de coordenadas, y en ejes rectangulares se reducen a las ecuaciones [6-52] antes obtenidas, que son las ecuaciones buscadas. Se observará

que al tensor de tensiones t^{ij} corresponde una densidad de fuerza por unidad de volumen:

$$K^i = \nabla_k t^{ki}. \qquad [6\text{-}55]$$

6-17. Otra forma de las ecuaciones de los medios continuos.—Las ecuaciones [6-54] se pueden escribir en una forma importante despejando las componentes γ^i de la aceleración. Dicha forma no es otra que la derivada total absoluta respecto al tiempo del vector velocidad $\vec{v}$. Se tiene así, en virtud de [6-40]:

$$\gamma^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma_k{}^i{}_h v^k v^h = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \Gamma_k{}^i{}_h v^k v^h + v^k \partial_k v^i,$$

o bien, agrupando los dos últimos términos del segundo miembro:

$$\gamma^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i. \qquad [6\text{-}56]$$

De aquí se deduce, si se hace figurar ρ bajo los signos de derivación:

$$\rho\gamma^i = \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k v^i) - v^i\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k)\right]$$

y, como el corchete es nulo en virtud de la ecuación de continuidad, se tiene:

$$\rho\gamma^i = \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k v^i).$$

de donde resulta una nueva forma para las ecuaciones generales de la dinámica de los medios continuos:

$$\frac{\partial(\rho v^i)}{\partial t} + \nabla_k(\rho v^k v^i + t^{ki}) = f^i. \qquad [6\text{-}57]$$

Fue precisamente esta forma la que sugirió a Einstein algunos de los postulados de la relatividad generalizada.

Las tres ecuaciones [6-57] determinan, junto con la ecuación de continuidad, el comportamiento del medio continuo bajo la acción de las fuerzas superficiales y de otras fuerzas. Por supuesto, el problema mecánico no queda determinado hasta que se conocen las t^{ik} y las f^i. Las fuerzas de masa están dadas por las condiciones exteriores, tales como la presencia de un campo gravitatorio, p. ej., en tanto que las tensiones dependen de las deformaciones internas del medio y del flujo de materia. Así, p. ej., en el caso de un fluido perfecto, se tiene:

$$t_{ik} = p g_{ik},$$

siendo p una función de ρ y de la temperatura, dada por la ecuación de estado del fluido.

Cabría adjuntar a las ecuaciones precedentes una ecuación de transferencia de energía, que es consecuencia de ellas y que expresa que la energía contenida en un elemento de volumen varía como el flujo de energía que atraviesa la superficie del elemento.

CAPITULO VII

LA TEORIA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA Y LAS ECUACIONES DE MAXWELL

FUNDAMENTOS DE LA TEORIA

7-1. La experiencia de Michelson.—Una exposición sistemática de la teoría de la relatividad rebasaría excesivamente los límites fijados a este libro. En este capítulo nos proponemos tan solo indicar los principios en que se basa esta teoría y señalar el papel esencial que en ella tienen los métodos tensoriales, principalmente en la representación del electromagnetismo.

Desde el punto de vista histórico, la teoría de la relatividad restringida tuvo su origen en el resultado negativo del experimento de Michelson. Diversos hechos experimentales habían conducido a admitir la existencia de un éter en reposo absoluto, que no participaba del movimiento de la materia y constituía la base para la propagación de las ondas electromagnéticas. Entre esos hechos principales figuraba la experiencia de Fizeau sobre la velocidad de propagación de la luz en un medio con velocidad de arrastre y el fenómeno de la aberración de las ondas luminosas.

De este concepto de éter inmóvil parecía deducirse inevitablemente que el valor de la velocidad de la luz, medida por un observador en movimiento respecto al éter, dependería de dicho

movimiento y, en particular, de la dirección de su velocidad. Si es c la velocidad de la luz respecto al éter inmóvil y v la del observador, éste debería observar, de acuerdo con la cinemática clásica, una velocidad $c - v$ o $c + v$, según se moviese en la misma dirección y sentido que la luz o bien en sentido opuesto. Un observador que *a priori* ignorase su movimiento respecto al éter podría apreciarlo experimentalmente emitiendo una señal luminosa en todas direcciones y midiendo los tiempos que tardaba dicha señal en alcanzar los puntos de una esfera con centro en la señal emitida. Si hubiese movimiento respecto al éter, el *viento de éter* debería soplar la señal, de manera que esta alcanzaría en primer lugar el punto de la esfera directamente opuesto al sentido del movimiento y en último lugar el punto correspondiente a la dirección y sentido del movimiento.

Esto constituyó el motivo de una experiencia célebre de Michelson, mediante la cual trató de determinar el estado de movimiento de la Tierra respecto al éter. Con relación a los ejes de Copérnico, que tienen su origen en el centro de gravedad del sistema solar, la velocidad del centro de gravedad de la Tierra sobre su trayectoria es aproximadamente de 30 Km/seg, y en seis meses dicho vector se transforma en otro sensiblemente opuesto. Podría ocurrir que en determinado instante el movimiento desconocido de los ejes de Copérnico respecto al éter anulase el movimiento absoluto de la Tierra, pero tal coincidencia no podría subsistir durante un año, p. ej.

Gracias a un dispositivo interferencial bien co-

nocido, cuya descripción omitiremos, Michelson pudo poner en evidencia un *viento de éter* igual únicamente a 1,5 Km/seg. Ahora bien, en realidad, no observó, dentro del orden de precisión de sus medidas, ningún desplazamiento de las bandas de interferencia, y la repetición del experimento para períodos diferentes del año condujo siempre al mismo resultado negativo. Experimentos más recientes han confirmado plenamente el resultado inicial de Michelson [1].

Así que la experiencia pone de manifiesto que *no existe dependencia de la velocidad de la luz* respecto al estado de movimiento del observador.

Para explicar el resultado negativo del experimento de Michelson se propusieron varias hipótesis: hipótesis del arrastre del éter, hipótesis de Ritz sobre la dependencia de la velocidad de la luz respecto al estado de velocidad del foco luminoso, etc. Hipótesis todas ellas artificiales que fueron desplazadas por los hechos experimentales. Fue la hipótesis de la contracción de los cuerpos en movimiento, formulada de forma bastante rudimentaria por Fitzgerald, la que condujo a los físicos, principalmente a Lorentz y Einstein, a la teoría de la relatividad restringida.

7-2. El principio de invariabilidad de la velocidad de la luz.—Lorentz y Einstein tomaron como punto de partida el resultado mismo del experimento de Michelson. Ya que el sistema de ejes de Galileo es un sistema de referencia en movimiento de traslación rectilíneo y uniforme con relación a los ejes de Copérnico, el resultado preciso del experimento de Michelson se puede enunciar de la manera siguiente: la velocidad de la luz es constante respecto a todos los sistemas de ejes de Galileo, definidos en forma aproximada durante cada breve intervalo de tiempo por las posiciones a lo largo de la órbita terrestre de un sistema de ejes ligados a la Tierra.

[1] Estas experiencias han sido realizadas por Kennedy (1926), Piccard y Stahel (1926-1928), Joos (1930). Han proporcionado una confirmación indirecta los experimentos de Ives (1938) sobre el efecto Doppler.

De este modo se llegó a enunciar el principio de invariabilidad de la velocidad de la luz.

Con relación a todos los sistemas de referencia de Galileo, en el vacío y en todas las direcciones y sentidos, la velocidad de la luz es la misma; esta velocidad, que es aproximadamente de 300 000 *Km/seg, se designa por la letra c.*

No dejaba de ser arriesgado fundamentar un principio de tanta generalidad sobre el resultado de un solo tipo de experimentos y que otra clase de experiencias hubiera podido destruir. Pero, esencialmente, el experimento de Michelson sirvió para llamar la atención de los físicos de manera imperiosa sobre un hecho matemático que se hallaba aún en la penumbra aunque había sido señalado por Poincaré; a saber: que las ecuaciones de la dinámica newtoniana y las ecuaciones de Maxwell de la teoría electromagnética no son invariantes respecto al mismo grupo de transformaciones. Existe, pues, incompatibilidad entre la dinámica pura y el electromagnetismo, y el principio de constancia de la velocidad de las ondas

electromagnéticas, tal como lo acabamos de enunciar, se halla en realidad implícito en las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell.

Para dirimir tal conflicto entre la mecánica clásica pura y el electromagnetismo, Einstein propuso admitir el principio de invariabilidad de la velocidad de las ondas electromagnéticas y conservar, por consiguiente, la teoría electromagnética de Maxwell, modificando la dinámica clásica para ponerla de acuerdo con el electromagnetismo.

7-3. Los principios de relatividad newtoniano y einsteniano.—Para comprender mejor el conflicto citado, volvamos a la mecánica clásica pura y consideremos dos sistemas de referencia cualesquiera de Galileo, cuya velocidad relativa designaremos por v. Reemplazando cada sistema por otro ligado invariablemente a él, es posible operar de manera que el eje $O'x'$ del segundo deslice sobre el eje Ox del primero, mientras los ejes $O'y'$ y $O'z'$ permanecen, respectivamente, paralelos a los Oy y Oz. Según la cinemática clásica, si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') designan las coordenadas y los tiempos de un mismo suceso respecto a los dos sistemas de Galileo, se tendrá:

$$x' = x - vt, \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = t, \qquad [7\text{-}1]$$

eligiendo para los tiempos t y t' un mismo origen. Componiendo la transformación [7-1] con las transformaciones que consisten en un desplazamiento puramente espacial combinado con un cambio

de origen para el tiempo, se obtiene la transformación más general que hace pasar, en mecánica clásica, de las coordenadas y el tiempo de un suceso en un sistema de referencia de Galileo a las coordenadas y el tiempo de este mismo suceso en cualquier otro sistema de Galileo. Al conjunto de estas transformaciones, que forman un grupo, se le llama *grupo de Galileo clásico*.

En dinámica newtoniana, los diferentes puntos materiales M_1, M_2, etc., se hallan sometidos a fuerzas que derivan de una función de fuerzas dependiente solo de las distancias relativas r_{12}, r_{13}, etc., entre las posiciones de los puntos en *un mismo instante*. Si $\vec{\gamma}_1$ designa la aceleración de M_1, respecto a un sistema de Galileo, la ecuación correspondiente al movimiento de M_1 se escribe:

$$m_1\vec{\gamma}_1 = \overrightarrow{\text{grad}}_{(M_1)}\Phi, \text{ etc.}; \qquad \Phi = \Phi\,(r_{12}, r_{13}, \text{etc.}).$$

Si se cambia el sistema de referencia, efectuando una transformación del grupo de Galileo clásico, se ve inmediatamente que

$$\vec{\gamma}_1 = \vec{\gamma}'_1, \text{ etc.}; \qquad r_{12} = r'_{12}, \text{ etc.},$$

y, en el nuevo sistema las ecuaciones del movimiento se escriben:

$$m_1\vec{\gamma}'_1 = \overrightarrow{\text{grad}}_{(M_1)}\Phi', \text{ etc.}; \qquad \Phi' = \Phi(r'_{12}, r'_{13}, \text{etc.}).$$

Así, las ecuaciones newtonianas del movimiento son invariantes respecto a las transformaciones

del grupo de Galileo clásico, de donde se deduce que, *según la mecánica clásica, ninguna experiencia puramente mecánica, realizada en el interior de un sistema de Galileo, permite poner de manifiesto el movimiento de este sistema con relación a cualquier otro sistema de Galileo.*

En esto consiste el *principio de relatividad newtoniano*. En la concepción clásica, este principio no se extiende al caso en que se admitan fenómenos electromagnéticos, puesto que las ecuaciones de Maxwell no son invariantes respecto al grupo de Galileo clásico.

De acuerdo con el experimento de Michelson y con el principio de invariabilidad de la velocidad de la luz, Einstein enunció su *principio de relatividad.*

Ningún experimento físico—mecánico o electromagnético—realizado en el interior de un sistema de Galileo permite poner de manifiesto el movimiento de este sistema con relación a cualquier otro sistema de Galileo.

La noción de éter en reposo absoluto pierde así todo su posible significado, y desaparece. Las ecuaciones de la física, referidas a sistemas de Galileo, deben ser invariantes respecto a las transformaciones de un mismo grupo, el cual debe, en particular, dejar invariantes las ecuaciones de Maxwell, consideradas como rigurosas. Este grupo, que se llama grupo de Lorentz, va a ser el objeto inmediato de nuestra atención.

EL GRUPO DE LORENTZ Y EL ESPACIO-TIEMPO DE MINKOWSKI

7-4. La variedad espacio-tiempo.—En el capítulo precedente, en el estudio de los sistemas dinámicos con ligaduras dependientes del tiempo, resultó conveniente representar los movimientos sobre una variedad V_{n+1}, llamada espacio-tiempo de configuración. De análoga manera, para representar los fenómenos de la mecánica y del electromagnetismo que se producen en el mundo, es natural recurrir a una variedad V_4 de cuatro dimensiones, tres de espacio y una de tiempo, y tal que a cada uno de sus puntos corresponda un suceso. Dicha entidad se llamará variedad *espacio-tiempo* o *universo*.

Esta variedad podrá referirse a sistemas de coordenadas curvilíneas cualesquiera. Si (y^1, y^2, y^3, y^4) designa uno de ellos, será posible efectuar los cambios de coordenadas:

$$y^\alpha = f^\alpha(y^{1'}, y^{2'}, y^{3'}, y^{4'}) \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \qquad [7\text{-}2]$$

en donde las f^α sólo están sometidas a las condiciones habituales de continuidad, biunivocidad y derivabilidad.

En la teoría de la relatividad restringida, suponemos que una porción al menos de esa variedad se puede referir a *coordenadas de Galileo* definidas de la manera siguiente: sean (x, y, z) las coordenadas de un punto del espacio respecto a un sistema de coordenadas rectangulares de Galileo de sentido directo; el principio de invariabilidad de la velocidad de la luz nos proporciona una definición

del tiempo t asociado, en ese sistema de ejes, a un suceso que tenga lugar en el punto (x, y, z). Las coordenadas (x, y, z, t) se denominan coordenadas de Galileo para V_4, y nos proponemos estudiar cuáles son las fórmulas de transformación de coordenadas del tipo:

$$\begin{cases} x = x(x', y', z', t') \\ y = y(x', y', z', t') \\ z = z(x', y', z', t') \\ t = t(x', y', z', t') \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = x'(x, y, z, t) \\ y' = y'(x, y, z, t) \\ z' = z'(x, y, z, t) \\ t' = t'(x, y, z, t), \end{cases} \qquad [7\text{-}3]$$

que hacen pasar de un sistema de coordenadas de Galileo (x, y, z, t) a otro (x', y', z', t').

7-5. El grupo de Lorentz.—Consideremos dos sistemas de coordenadas de Galileo y estudiemos en ambos el desplazamiento infinitesimal de una onda electromagnética.

En el primer sistema, el espacio referido a ejes rectangulares admite el elemento lineal:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Consideremos en este sistema los dos sucesos infinitamente próximos (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$. Si estos dos sucesos definen el desplazamiento infinitesimal de una onda electromagnética, en virtud del principio de invariabilidad de la velocidad, se tendrá:

$$\frac{d\sigma^2}{dt^2} = c^2.$$

Así que para todo desplazamiento elemental de una onda electromagnética, es nula la expresión:

$$ds^2 = c^2dt^2 - d\sigma^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad [7\text{-}4]$$

Por tanto, la misma expresión calculada en el segundo sistema de coordenadas de Galileo,

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - d\sigma'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2,$$

también será nula, y recíprocamente. Siendo M el punto considerado en V_4, resulta de aquí que existe una función $f(M)$, que puede depender *a priori* de la velocidad relativa $\vec{v}$ de los dos sistemas de Galileo considerados, y para la cual:

$$ds'^2 = f(M)ds^2, \qquad 7\text{-}5$$

o en forma más explícita:

$$c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = f(x, y, z, t)\,(c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2). \qquad 7\text{-}6$$

Cuando dos sistemas de Galileo están en reposo, uno respecto del otro, la función f debe reducirse a la unidad, y se demuestra en tal caso que las únicas soluciones de la identidad [7-6] que pueden satisfacer al problema físico propuesto son aquellas para las que f es idéntica a 1, con lo cual la ecuación [7-6] toma la forma:

$$c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad [7\text{-}7]$$

Resulta así que debemos hallar todas las transformaciones de coordenadas [7-3] que satisfacen la identidad [7-7], es decir, que dejan invariante la forma cuadrática diferencial definida por [7-4] y que se reducen para $v = 0$ a la transformación constituida por un desplazamiento puramente espacial y un cambio de origen para el tiempo. Es obvio que esas transformaciones forman un grupo: si dos de ellas dejan invariante la forma cuadrática [7-4], otro tanto sucederá con su producto; asimismo, la inversa de una transformación del tipo considerado deja invariante dicha forma cuadrática. Este grupo de transformaciones así definido se llama *grupo de Lorentz*.

La determinación de las transformaciones del grupo de Lorentz es un problema clásico de análisis, del que nos limitaremos a esbozar la solución. No es difícil hallar una interpretación geométrica sencilla del grupo de Lorentz. Hagamos:

$$u = ict; \qquad u' = ict' \qquad (i^2 = -1). \qquad [7\text{-}8]$$

La identidad [7-7] toma así la forma:

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 + du'^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2. \qquad [7\text{-}9]$$

Al grupo de Lorentz corresponde, pues, el grupo de los desplazamientos del espacio propiamente euclidiano de cuatro dimensiones, el cual se obtiene componiendo con las traslaciones

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c, \quad u' = u + d$$

las transformaciones lineales ortogonales de cuatro variables (x, y, z, u).

De acuerdo con su propia definición, el grupo de Lorentz comprende las transformaciones que consisten en un desplazamiento puramente espacial (desplazamiento fijo relativo al espacio de tres dimensiones, que, por consiguiente, conserva la forma $dx^2 + dy^2 + dz^2$) y en un cambio de origen para el tiempo. Vamos a buscar una transformación particular que, compuesta con las soluciones triviales ya señaladas, engendra la transformación más genèral del grupo de Lorentz.

A tal efecto, observemos que añadiendo una constante a cada una de las cuatro variables x, y, z, u, lo que equivale a efectuar una traslación respecto al triedro $Oxyz$ y a cambiar el origen de tiempos, las funciones buscadas [7-3], que son necesariamente lineales, pueden hacerse homogéneas. Esto significa que el origen del primer sistema de referencia, en el tiempo $t = 0$, coincide con el del segundo en el instante $t' = 0$. A consecuencia del movimiento de traslación rectilínea del segundo sistema de referencia respecto al primero, toda recta ligada invariablemente al segundo sistema y paralela a la velocidad relativa se desliza sobre una recta ligada invariablemente al primero. Reemplazando los sistemas iniciales por otros que se hallen invariablemente ligados a ellos, cabe conseguir que el eje $O'x'$ deslice en el transcurso del movimiento sobre el eje Ox, y que la dirección común de estos ejes sea la correspondiente a la velocidad relativa. Efectuando sobre $O'x'y'z'$ una rotación fija alrededor de $O'x'$ se logra que $O'y'$ y $O'z'$ sean paralelos y del mismo sentido que Oy y Oz, lo cual significa que el triedro $Oxyz$ en el instante

$t = 0$ coincide con el triedro $O'x'y'z'$ en el instante $t' = 0$.

En el espacio euclidiano de cuatro dimensiones, referido a sistemas ortonormales definidos por (x, y, z, u) y (x', y', z', u'), el problema se reduce al estudio de las *rotaciones* que dejan simultáneamente invariantes el plano definido por $y = 0$ (o bien por $y' = 0$) y el plano determinado por $z = 0$ (o por $z' = 0$) y que dejan, por consiguiente, invariantes los ejes de coordenadas ortogonales relativos a las variables z e y. De esto se deduce, como en el espacio de tres dimensiones, que

$$y' = y; \qquad z' = z. \qquad [7\text{-}10]$$

Los dos miembros de la identidad [7-9] se escriben en tal caso:

$$dx'^2 + du'^2 = dx^2 + du^2, \qquad [7\text{-}11]$$

con lo que el problema queda reducido a otro con solo dos variables x y u. Los orígenes de los sistemas de coordenadas (x, u) y (x', u') coinciden, por lo cual la identidad [7-11] define las rotaciones planas clásicas:

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi + u \operatorname{sen}\varphi \\ u' = -x\operatorname{sen}\varphi + u\cos\varphi, \end{cases} \qquad [7\text{-}12]$$

en donde φ representa un parámetro angular arbitrario.

Transformemos [7-12] de manera que solo intervengan elementos reales; siendo u y u' imaginarios puros, sen φ es imaginario puro y cos φ es real; como tg φ es imaginario puro y adimensional, haremos:

$$\operatorname{tg}\varphi = i\frac{v}{c},$$

sustituyendo φ por un parámetro real v con iguales dimensiones que una velocidad. Se deduce así:

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{i\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad [7\text{-}13]$$

Sustituyendo en [7-12] los valores de cos φ y de sen φ dados por [7-13] y volviendo a las variables reales t y t', se obtiene:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \qquad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Hemos establecido así que, a partir de la transformación particular,

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \qquad y' = y; \qquad z' = z; \qquad [7\text{-}14]$$

$$t' = \frac{t - \beta\frac{x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$$

es posible deducir la transformación más general del grupo de Lorentz mediante composición de [7-14]

con las transformaciones triviales (desplazamiento puramente espacial y cambio de origen para el tiempo). La transformación [7-14] recibe el nombre de *transformación especial de Lorentz*.

Es evidente, de acuerdo con las fórmulas [7-14], que el número v, *necesariamente inferior a c* en valor absoluto, es tal que todo punto ligado al segundo sistema de Galileo (el origen, p. ej.) está animado respecto al primero de un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad v, paralela a Ox. Se observará que si $\beta = \frac{v}{c}$ se hace despreciable, las fórmulas [7-14] se reducen en el límite a las [7-1], que nos han servido para definir el grupo de Galileo clásico. Para $v = 0$, la transformación [7-14] es, por supuesto, la transformación idéntica. Las fórmulas inversas de [7-14],

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{t' + \beta\frac{x'}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad [7\text{-}15]$$

solo difieren de las precedentes en el cambio de las variables y en la sustitución de v por $-v$.

Resultaría bastante enojoso comprobar directamente que las ecuaciones de Maxwell en su forma clásica son invariantes respecto a las transformaciones del grupo de Lorentz. Sin embargo, este resultado es consecuencia trivial de la forma tensorial simple en la que es posible escribir estas ecuaciones.

7-6. Transformación de Lorentz en forma intrínseca.—Es cómodo traducir la transformación es-

pecial de Lorentz a notaciones vectoriales de tres dimensiones. De esta manera queda hecha de forma automática la eliminación de las rotaciones puramente espaciales referentes a uno u otro de los triedros, con lo que la transformación obtenida, compuesta de simples traslaciones del espacio y de cambios de origen para el tiempo, nos proporciona la transformación más general del grupo de Lorentz.

Puesto que los vectores introducidos son los de la geometría ordinaria, designemos por $\vec{v}$ el vector velocidad relativa del segundo sistema de referencia respecto al primero, y por $\vec{k}$ el vector unitario llevado sobre Ox y colineal a $\vec{v}$; se tiene así:

$$\vec{v} = v\vec{k}.$$

Representemos por $\vec{r}$ el vector espacio que une el origen O del primer sistema de referencia con el punto M (x, y, z), y por $\vec{r}'$, el vector homólogo relativo al segundo sistema; $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ se pueden expresar en la forma:

$$\begin{cases} \vec{r} = x\vec{k} + \vec{r}_1; \\ \vec{r}' = x'\vec{k} + \vec{r}'_1, \end{cases} \qquad [7\text{-}16]$$

en donde $\vec{r}_1$ y $\vec{r}'_1$ designan las componentes nor-

males a $\vec{v}$ de $\vec{r}$ y $\vec{r}'$. En virtud de la transformación de Lorentz [7-15], entre los términos que figuran en los segundos miembros de [7-16] se tienen las relaciones:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad \vec{r}_1 = \vec{r}'_1.$$

Tratemos de expresar $\vec{r}$ en función de $\vec{r}'$, de $\vec{v}$ y del tiempo t'. Restando miembro a miembro las ecuaciones [7-16], resulta:

$$\vec{r} = \vec{r}' + (x - x')\vec{k}. \qquad [7\text{-}17]$$

Por tanto,

$$x - x' = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - x' = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)x' + \frac{vt'}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

y también

$$x'\vec{k} = (\vec{r}'\vec{k})\vec{k} = (\vec{r}'\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2}$$

Sustituyendo estas expresiones en [7-17], se obtiene la fórmula de transformación para los radios vectores:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)(\vec{r}'\vec{v})\frac{\vec{v}}{v^2} + \frac{\vec{v}t'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad [7\text{-}18]$$

la cual pone de manifiesto que los tres vectores $\vec{r}$, $\vec{r}'$ y $\vec{v}$ son siempre coplanarios. En cuanto a la

fórmula relativa al tiempo, se puede evidentemente escribir (véase [7-15]).

$$t = \frac{t' + \dfrac{\vec{r}'\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}19]$$

Las fórmulas [7-18] y [7-19], escritas en forma vectorial pura, son de cómodo empleo en gran número de cuestiones de relatividad restringida. Vamos a utilizarlas para establecer la fórmula de Einstein de composición de velocidades.

7-7. La ley relativista de composición de velocidades.—En la cinemática clásica, el teorema de composición de velocidades es bien sencillo: si $\vec{v}$ designa la velocidad de un sistema de Galileo S', respecto al sistema de Galileo S, y si un punto material P se mueve con relación a S' animado de la velocidad $\vec{u}'$, su velocidad respecto a S será:

$$\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}'. \qquad [7\text{-}20]$$

En la teoría de la relatividad restringida, la relación entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{u}'$ es bastante más complicada. Con las notaciones de la sección anterior, las velocidades de P con relación a ambos sistemas de Galileo estarán dadas por

$$\vec{u} = \frac{d\vec{r}}{dt}; \qquad \vec{u}' = \frac{d\vec{r}'}{dt'}$$

Derivando [7-18] respecto a t, se obtiene:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\frac{d\vec{r}'}{dt'} + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\left(\frac{d\vec{r}'}{dt'}\,\vec{v}\right)\frac{\vec{v}}{v^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right]\frac{dt'}{dt} \qquad [7\text{-}21]$$

Y si derivamos [7-19] respecto a t', resulta:

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Sustituyendo en [7-21] dt/dt' por su valor, se llega a la relación:

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}}\left[\sqrt{1-\beta^2}\,\vec{u}' + (1 - \sqrt{1-\beta^2})\,\frac{\vec{u}'\vec{v}}{v^2}\,\vec{v} + \vec{v}\right]$$

lo cual prueba que los tres vectores $\vec{u}$, $\vec{u}'$ y $\vec{v}$ son coplanarios. Esta relación se transforma fácilmente en la fórmula de composición de velocidades:

$$\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}}\left[\left(1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}\right)\vec{v} \right.$$

$$\left. + \sqrt{1-\beta^2}\left(\vec{u}' - \frac{\vec{u}'\vec{v}}{v^2}\,\vec{v}\right)\right]. \qquad [7\text{-}22]$$

El numerador de [7-22] es la suma de dos vectores: uno colineal con $\vec{v}$ y el otro perpendicular a $\vec{v}$. Si $\beta = v/c$ es despreciable respecto a la unidad, la fórmula [7-22] se reduce en el límite a la fórmula clásica [7-20]. Se deduce inmediatamente de [7-22] la expresión del cuadrado de $\vec{u}$:

$$u^2 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}\right)^2}\left[u'^2 + v^2 + 2\,\vec{u}'\vec{v} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\vec{u}'\vec{v})^2}{c^2} - \frac{u'^2 v^2}{c^2}\right]. \qquad [7\text{-}23]$$

en la cual las dos velocidades $\vec{u}'$ y $\vec{v}$ desempeñan papeles simétricos.

Cuando los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}$ son colineales, $\vec{u}$ tiene también la misma dirección, y el segundo término del numerador de [7-22] se anula. Entre los módulos de las tres velocidades se verifica la relación de Einstein:

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \qquad [7\text{-}24]$$

Es fácil comprobar sobre las fórmulas [7-23] o [7-24] la imposibilidad de sobrepasar la velocidad de la luz mediante composición de dos velocidades inferiores o iguales a c. En particular, si se toma $u' = c$ en [7-23], se tiene:

$$u^2 = \frac{c^2}{\left(1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}\right)^2}\left(1 + \frac{\vec{u}'\vec{v}}{c^2}\right)^2 = c^2.$$

Así, para $u' = c$, se obtiene siempre $u = c$, cualquiera que sea la velocidad de arrastre $\vec{v}$, resultado que está plenamente de acuerdo con el principio de invariabilidad de la velocidad de la luz.

7-8. El espacio-tiempo de Minkowski.—La identidad [7-7] nos dice que si consideramos dos sucesos infinitamente próximos, como (x, y, z, t) y $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$, la expresión:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad [7\text{-}25]$$

tiene el mismo valor en todos los sistemas de coordenadas de Galileo. Se observará que si los dos sucesos corresponden a una velocidad inferior a c, el valor que toma [7-25] es positivo.

Con ello resulta que, en relatividad restringida, *la variedad* V_4 *está dotada de la métrica definida por la forma cuadrática* [7-25]. Como esta métrica tiene coeficientes constantes en variables de Galileo y su signatura es $+ - - -$, resulta que define V_4 *como espacio impropiamente euclidiano*. A este espacio se le llama *espacio-tiempo de Minkowski*, y a la expresión ds, *intervalo elemental de universo*.

Las coordenadas de Galileo constituyen un sistema de coordenadas rectilíneas ortogonales para este espacio. Se obtendrá en V_4 un sistema ortonormal (teniendo en cuenta la signatura) si se sustituyen las variables x, y, z, t por las

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z, \quad x^4 = ct. \qquad [7\text{-}26]$$

La métrica [7-25] adopta en tal caso la forma:

$$ds^2 = (dx^4)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2.$$

Las variables x^α se llaman *coordenadas de Galileo reducidas;* de ellas haremos frecuente uso en lo sucesivo, y escribiremos:

$$ds^2 = m_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \text{ } (\alpha \text{ y } \beta \text{ y todo índice griego} = 1, 2, 3, 4), \qquad [7\text{-}27]$$

con

$$m_{\alpha\beta} = 0 \; (\alpha \neq \beta)\,; \quad m_{44} = -m_{11} = -m_{22} = -m_{33} = 1.$$

Naturalmente, el espacio-tiempo de Minkowski puede referirse a coordenadas curvilíneas cualesquiera, y entonces su métrica tendrá la forma:

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta,$$

en donde las $g_{\alpha\beta}$ son funciones de las coordenadas curvilíneas (y^α).

LA DINAMICA DE LA RELATIVIDAD RESTRINGIDA

7-9. El vector velocidad unitario y el principio de inercia.—En el espacio-tiempo de Minkowski, consideremos un punto material P en movimiento, con una velocidad inferior, naturalmente, a c. Este movimiento puede definirse dando las coordenadas (y^α) en función de un mismo parámetro; p. ej., el intervalo s contado a lo largo de la trayectoria de P en V_4. Se llama *vector velocidad*

unitario de P al *vector de universo*, evidentemente unitario, de componentes:

$$u^\alpha = \frac{dy^\alpha}{ds} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4). \qquad [7\text{-}28]$$

Veamos la interpretación de las componentes de este vector en coordenadas de Galileo reducidas. Las componentes del vector velocidad del espacio ordinario $\vec{v}$ son:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \quad (i \text{ y todo índice latino} = 1, 2, 3). \qquad [7\text{-}29]$$

De aquí se deduce que, en las mismas coordenadas, se tiene:

$$\begin{cases} u^i = \dfrac{dx^i}{ds} = v^i \dfrac{dt}{ds} \\ u^4 = \dfrac{dx^4}{ds} = c \dfrac{dt}{ds} \end{cases}$$

Además, si $v = \beta c$ designa el módulo de la velocidad [7-29], se tendrá, en virtud de [7-25]:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{1}{c\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad [7\text{-}30]$$

De donde resulta que, en coordenadas de Galileo reducidas,

$$u^i = \frac{v^i}{c\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad u^4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}31]$$

Supongamos que el punto P está animado, en coordenadas de Galileo, de un movimiento rectilíneo y uniforme. Las componentes v^i y, por consiguiente, las componentes u^α dadas por [7-31] son en tal caso constantes, y

$$\frac{du^i}{ds} = 0; \qquad \frac{du^4}{ds} = 0. \qquad [7\text{-}32]$$

De otra forma, el punto P admite como trayectoria de universo una geodésica de [7-25], a lo largo de la cual ds^2 es positivo. Recíprocamente, el sistema diferencial de las geodésicas [7-25] se puede escribir en variables de Galileo en la forma siguiente:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0; \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = 0; \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

y a toda geodésica, a lo largo de la cual ds^2 sea positivo, corresponde un movimiento rectilíneo y uniforme de velocidad inferior a c.

Ahora bien: en dinámica clásica el principio de inercia afirma que un punto material aislado admite, respecto a ejes de Galileo, un movimiento rectilíneo y uniforme; en la teoría de la relatividad restringida conservamos este principio en coordenadas de Galileo, al que podemos dar el enunciado de forma invariante siguiente:

PRINCIPIO DE INERCIA.—*Un punto material aislado admite como trayectoria de universo una geodésica del elemento lineal de Minkowski para la cual este ds^2 es positivo.*

En cuanto a las geodésicas para las cuales es $ds^2 = 0$, corresponden en el espacio a las rectas recorridas con la velocidad c, es decir, a los rayos luminosos. Se ve así que la teoría de la relatividad restringida se halla ligada de manera sencilla con la geometría del espacio-tiempo de Minkowski.

7-10. Ecuaciones de la dinámica de una masa puntual.—Consideremos el movimiento de un punto material P sometido a una fuerza $\vec{f}$ dada, que puede depender de la posición y de la velocidad de P. En dinámica clásica, el movimiento de este punto satisface a la ecuación fundamental de Newton:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}. \qquad [7\text{-}33]$$

en donde m designa la masa del punto y $\vec{v}$ es su vector velocidad de espacio. De [7-33] resulta el teorema llamado de las fuerzas vivas o de la energía:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} mv^2\right) = \vec{f} \cdot \vec{v}. \qquad [7\text{-}34]$$

Las ecuaciones newtonianas [7-33] y [7-34] no son invariantes para las transformaciones del grupo de Lorentz que hacen pasar, en relatividad, de un sistema de coordenadas de Galileo a otro sistema de coordenadas del mismo tipo. Hay que transformar bastante dichas ecuaciones para adaptarlas a la teoría de la relatividad restringida. En

esta modificación conviene seguir la idea directriz de que las nuevas ecuaciones deben reducirse a las antiguas para velocidades pequeñas.

Del sistema diferencial [7-32], que define con el simbolismo de la relatividad el movimiento de un punto material aislado, nace la sugerencia de sustituir la aceleración ordinaria de P por la aceleración de universo relativa a s, la cual se halla definida en coordenadas curvilíneas arbitrarias (y^α) por la relación:

$$J^\alpha = \frac{\nabla u^\alpha}{ds} \quad (\alpha = 1, 2, 3, 4).$$

Si caracterizamos la inercia del punto P mediante un parámetro m_0, que posea las dimensiones de una masa y que llamaremos *masa en reposo* de P, llegamos a la siguiente forma de las ecuaciones del movimiento de P:

$$m_0 c^2 \frac{\nabla u^\alpha}{ds} = \Phi^\alpha, \qquad [7\text{-}35]$$

en donde el coeficiente c^2 se ha introducido por razones de homogeneidad que se justificarán inmediatamente. Las ecuaciones [7-35] son las *ecuaciones fundamentales de la dinámica de la relatividad restringida* y fueron sugeridas originalmente por Minkowski.

Como el vector u^α es unitario, su diferencial absoluta ∇u^α es ortogonal al mismo, deduciéndose de [7-35] que

$$\Phi^\alpha u_\alpha = 0 \qquad [7\text{-}36]$$

Así que el vector Φ^ν, que desempeña el papel de vector fuerza de universo, es constantemente ortogonal al vector velocidad unitario.

Situémonos ahora en coordenadas de Galileo y tratemos de interpretar las ecuaciones [7-35] comparándolas con las ecuaciones newtonianas [7-33] y [7-34]. En tal sistema de coordenadas las ecuaciones [7-35] se escriben:

$$m_0 c^2 \frac{du^\nu}{ds} = \Phi^\nu ;$$

o sea, volviendo a la variable t ligada a s por [7-30],

$$m_0 c \frac{du^\nu}{dt} = \Phi^\nu \sqrt{1-\beta^2}.$$

Expresando las componentes u^ν en función de las de la velocidad de espacio $\vec{v}$ mediante las fórmulas [7-31], se llega a las ecuaciones:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Phi^i \sqrt{1-\beta^2}; \qquad [7\text{-}37]$$

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \Phi^4 \sqrt{1-\beta^2}, \qquad [7\text{-}38]$$

las cuales se comparan fácilmente con las de Newton. Si designamos por $\vec{f}$ el vector de espacio de componentes

$$f^i = \Phi^i \sqrt{1-\beta^2} \qquad [7\text{-}39]$$

las ecuaciones [7-37] se traducen en la ecuación vectorial de espacio:

$$m_0 \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{f}, \qquad [7\text{-}40]$$

la cual debe compararse con la ecuación fundamental [7-33] de la dinámica clásica, a la que se reduce cuando β es despreciable respecto a la unidad.

Es algo más delicada la interpretación de la ecuación [7-38] y de su segundo miembro. La condición de ortogonalidad [7-36] se expresa en coordenadas de Galileo reducidas por la relación:

$$\Phi^4 u^4 = \sum_i \Phi^i u^i ;$$

o sea, según las fórmulas [7-31] y [7-39],

$$\frac{\Phi^4}{\sqrt{1-\beta^2}} = \sum_i \frac{f^i v^i}{c(1-\beta^2)} = \frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c(1-\beta^2)},$$

de donde se deduce:

$$\Phi^4 \sqrt{1-\beta^2} = \frac{\vec{f}\cdot\vec{v}}{c},$$

y la ecuación [7-38] puede escribirse en la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \vec{f}\cdot\vec{v}. \qquad [7\text{-}41]$$

El segundo miembro de [7-41] es idéntico al segundo miembro de la ecuación [7-34] de la me-

cánica clásica, de tal suerte que la variación con el tiempo de la cantidad

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}42]$$

es igual al trabajo de la fuerza $\vec{f}$. Con ello llegamos a la interpretación de la cantidad [7-42]: define en la teoría de la relatividad restringida la energía total del punto material considerado. Es esencial observar que esta energía no se anula cuando la velocidad v tiende a cero. Haremos:

$$E = E_0 + T$$

con

$$E_0 = m_0 c^2; \qquad T = m_0 c^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right]. \qquad [7\text{-}43]$$

A E_0 se le llama *energía en reposo* del punto material, y T recibe el nombre de *energía cinética relativista*. Se observará que para velocidades pequeñas,

$$T = \frac{1}{2} m_0 c^2 \beta^2 = \frac{1}{2} m_0 v^2;$$

por consiguiente, para pequeñas velocidades E solo difiere en la constante E_0 de la energía cinética ordinaria de la mecánica clásica.

7-11. El vector de impulsión-energía y la masa relativista.—Se llama *vector de impulsión-energía*

al vector de universo colineal con el vector velocidad unitario, de componentes

$$p^i = m_0 c u^i. \qquad [7\text{-}44]$$

En virtud de las fórmulas [7-31], las componentes de este vector en coordenadas de Galileo reducidas son:

$$p^i = m_0 \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad p^4 = m_0 \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E}{c} \qquad [7\text{-}45]$$

Introduciendo el vector impulsión de espacio $\vec{p}$, de componentes p^i, la ecuación fundamental [7-40] se puede escribir en la forma:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}. \qquad [7\text{-}46]$$

Así que, desde el punto de vista de la ecuación fundamental de la dinámica, todo sucede como si se hubiese sustituido el vector impulsión clásico por el vector $\vec{p}$; es decir, como si el punto material P se considerase como un punto de masa *variable*,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}47]$$

La masa m definida por [7-47] recibe el nombre de *masa relativista* de P. Para pequeñas velocidades, m se reduce a la masa en reposo, m_0; por el contrario, cuando v tiende hacia la velocidad de la luz, m tiende a infinito.

Según [7-42], la *masa relativista* es igual al cociente de la *energía total* E por c^2, mientras que la *masa en reposo* es el cociente por c^2 de la *energía en reposo* E_0. Resulta así que en relatividad, y debido a la existencia del factor c^2, hay una correlación muy estricta entre masa y energía, circunstancia que no tiene analogía en la física clásica. Vamos a profundizar algo más el estudio de esta correlación.

7-12. La inercia de la energía.—Consideremos una partícula material compleja y un sistema de Galileo S_0 tal que, en un punto del universo determinado, el vector impulsión total $\vec{p}$ de la partícula sea nulo respecto a S_0. Supongamos que, con relación a S_0, la partícula admite la energía total E_0 bajo formas cualesquiera; la cantidad E_0 es entonces la *energía en reposo* de la partícula. El vector de impulsión-energía de la partícula tiene como componentes respecto a S_0:

$$p_0^i = 0 ; \qquad p_0^4 = \frac{E_0}{c^2}$$

Volvamos ahora a un sistema de Galileo cualquiera S, con relación al cual S_0 se mueve con velocidad de espacio $\vec{v}$. Efectuando una transformación de Lorentz, se comprueba que el vector de impulsión-energía admite ahora las componentes:

$$p^i = \frac{E_0}{c^2} \frac{v^i}{\sqrt{1-\beta^2}} ; \qquad p^4 = \frac{E_0}{c^2} \frac{c}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}48]$$

Sobre las fórmulas anteriores resulta obvio que cada forma de energía aporta su contribución al vector impulsión de espacio, como si dicha forma correspondiese a una masa igual a su cociente por c^2. De todo ello resulta el siguiente enunciado:

Todo sistema físico que posea, bajo cualquier forma, la energía en reposo E_0, *posee al propio tiempo una masa inerte, de valor*

$$m_0 = \frac{E_0}{c^2} . \qquad [7\text{-}49]$$

Este resultado, conocido con el nombre de *principio de inercia de la energía*, fue enunciado por Einstein. Este reconocimiento del hecho de que masa y energía son equivalentes es, sin duda, la aportación más fecunda que ha hecho a la física la dinámica relativista.

Como ejemplo de esta inercia de la energía, supongamos que la partícula referida a S_0 no esté sometida a ninguna fuerza, y que emita, durante un intervalo finito de tiempo, una energía ΔE_0 en forma de *radiación electromagnética*. Esta radiación se efectuará, p. ej., bajo la forma de una onda esférica, de manera que la impulsión resultante respecto a S_0 de la energía radiada sea nula. Es claro entonces que la partícula, inicialmente en reposo respecto a S_0, lo seguirá estando después de esa emisión.

Refiramos ahora el fenómeno que acabamos de considerar al sistema de Galileo S. El sistema constituido por la partícula y la radiación es un sistema

aislado, por lo que habrá conservación del vector impulsión-energía total. Respecto a S, la radiación admite la impulsión

$$\frac{\Delta E_0}{c^2} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

y la energía

$$\frac{\Delta E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Por tanto, la partícula ha debido suministrar tales impulsión y energía sin que haya variado su velocidad, lo cual solo es posible modificando su masa en reposo. Si designamos por m_0 la masa en reposo de la partícula antes de la emisión y por m'_0 la que tiene después de haberla realizado, se obtienen las relaciones de conservación:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{m'_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\Delta E_0}{c^2} \frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} &= \frac{m'_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{\Delta E_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \end{aligned}\right.$$

que son equivalentes a

$$m'_0 = m_0 - \frac{\Delta E_0}{c^2}$$

La masa de la partícula ha disminuido, por tanto, en una cantidad igual al cociente por c^2 de la energía emitida.

En la dinámica clásica, las leyes de conservación para la masa y para la energía de un sistema aislado son distintas. En la dinámica relativista solo existe una ley de conservación para la energía total de un sistema aislado; las masas en reposo de los elementos constituyentes del sistema cambiarán cada vez que la energía cinética se transforme en otras clases de energía, y viceversa. La masa en reposo de una partícula material no puntual permanece constante en tanto que la energía en reposo correspondiente no es alterada por los cambios citados. Pero las masas en reposo pueden cambiar de manera apreciable cuando las energías de interacción sean del mismo orden de magnitud que las energías en reposo.

Así consiguen explicarse los defectos de masa observados en los núcleos atómicos y, de una manera general, la mayoría de las reacciones nucleares.

Se concibe el papel esencial que desempeña la inercia de la energía en el estudio de los fenómenos nucleares, objeto de tantas investigaciones por parte de los físicos contemporáneos. La física actual sabe ya cómo materializar la energía en forma de partículas elementales, y desintegrar la materia para liberar una fracción importante de la energía equivalente.

LA DINÁMICA RELATIVISTA DE LOS MEDIOS CONTINUOS

7-13. Ecuaciones correspondientes al sistema en reposo.—Para obtener la forma relativista de las ecuaciones del movimiento de un medio continuo, consideremos un sistema de Galileo ortogonal S_0,

respecto al cual la materia está en reposo en un punto de universo P_0, y trataremos en primer lugar de escribir las ecuaciones en P_0 referidas a S_0.

En el punto P_0, todas las componentes v^i del vector velocidad de espacio $\vec{v}$ son nulas; por el contrario, las derivadas de estas componentes son en general distintas de cero. Si designamos por u^λ el vector velocidad unitario de universo asociado a v^i, es claro que en P_0 se tiene:

$$u^i = 0; \qquad u^4 = 1. \qquad [7\text{-}50]$$

De aquí resulta, según las fórmulas [7-31], que las derivadas de las u^α están dadas por las fórmulas:

$$\partial_\lambda u^i = \frac{1}{c}\partial_\lambda v^i; \qquad \partial_\lambda u^4 = 0, \qquad [7\text{-}51]$$

puesto que, por ser u^α unitario,

$$u^\alpha \partial_\lambda u_\alpha = 0.$$

Visto esto, las ecuaciones no relativistas [6-43] y [6-57] toman, en el sistema S_0 y en el punto P_0, la forma:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{p}^i}{\partial t} + \partial_k t^{ik} = f^i \\ &\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k \overline{p}^k = 0, \end{aligned}\right. \qquad [7\text{-}52]$$

en donde $\overline{p}^i$ designa el vector impulsión clásico por unidad de volumen.

En este vector impulsión clásico, ρv^i, solo interviene la energía correspondiente a la densidad de la materia, ρ. Ahora bien: sabemos que en dinámica relativista todas las formas de energía deben aportar su contribución al vector impulsión. Aquí únicamente consideramos como término adicional la energía correspondiente a la acción de las tensiones mecánicas, descartando en particular el caso en que hubiese simultáneamente interacción electromagnética.

Para calcular el flujo de energía correspondiente, consideremos un elemento de área dS, cuyas *componentes* designamos por $d\sigma_k$, según las notaciones introducidas en la sección 6-15. Según [6-46], corresponde a este una fuerza superficial elemental:

$$T^l dS = t^{kl} d\sigma_k.$$

Si la materia se mueve en las proximidades de este elemento de área con la velocidad $\vec{v}$, de componentes contravariantes v^l, el trabajo correspondiente viene dado por

$$\sum_l v^l t^{kl} d\sigma_k;$$

o sea, introduciendo las componentes covariantes de la velocidad en la métrica $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2$ relativa al espacio,

$$- v_l t^{kl} d\sigma_k$$

En otras palabras: existe un flujo de energía que atraviesa el elemento de área dS, y el vector que define este flujo total de energía tiene por componentes:

$$\rho c^2 v^i - v_l t^{il},$$

en donde el primer término corresponde a la densidad de materia ρ. Resulta de ello, de acuerdo con la relación relativista entre energía y masa (véase [7-48]), un vector impulsión por unidad de volumen, el cual es igual al cociente por c^2 del vector precedente; es decir,

$$p^i = \rho v^i - \frac{1}{c^2} v_l t^{il}. \qquad [7\text{-}53]$$

Las componentes de este vector son nulas en P_0, pero no así sus derivadas, que son las que únicamente van a intervenir. Basta sustituir el vector $\vec{p}$ por [7-53] en las ecuaciones clásicas [7-52] para obtener las ecuaciones relativistas del movimiento, que serán válidas en P_0 y en el sistema de referencia de Galileo S_0 considerado. Así se tiene:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\rho v^i - \dfrac{1}{c^2} v_l t^{il}\right) + \partial_k t^{ik} = f^i \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_k\left(\rho v^k - \dfrac{1}{c^2} v_l t^{kl}\right) = 0; \end{cases}$$

o sea, teniendo en cuenta la anulación en P_0 de las v^i,

$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial v^i}{\partial t} - \dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial v_l}{\partial t} t^{il} + \partial_k t^{ik} = f^i \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \partial_k v^k - \dfrac{1}{c^2} \partial_k v_l t^{kl} = 0. \end{cases}$$

Introduzcamos, en lugar de las derivadas respecto a la variable t, las derivadas respecto a la variable $x^4 = ct$; con la notación habitual para las derivadas parciales, se obtiene:

$$\begin{cases} \rho c \partial_4 v^i - \dfrac{1}{c} \partial_4 v_l t^{il} + \partial_k t^{ik} = f^i \\ c \partial_4 \rho + \rho \partial_k v^k - \dfrac{1}{c^2} \partial_k v_l t^{kl} = 0. \end{cases} \qquad [7\text{-}54]$$

que son las ecuaciones buscadas.

7-14. Forma tensorial de las ecuaciones del movimiento.—A partir de las ecuaciones [7-54], válidas en el punto de universo P_0 respecto al sistema en reposo S_0, nos será posible determinar la forma tensorial general de las ecuaciones del movimiento, la cual es la traducción en dinámica relativista de las ecuaciones clásicas [6-43] y [6-57].

La forma de las ecuaciones no relativistas [6-57] nos sugiere que debe desempeñar un papel importante en las ecuaciones buscadas un tensor simétrico con dos índices.

Introduciremos el tensor de universo $T^{\lambda\mu}$, que, en el sistema de coordenadas S_0 y en el punto P_0, admite las componentes:

$$T^{ik} = t^{ik}; \qquad T^{i4} = T^{4i} = T^{44} = 0,$$

y que, por consiguiente, satisface idénticamente a la ecuación tensorial:

$$T^{\lambda\mu} u_\mu = 0 \qquad [7\text{-}55]$$

Introducimos también el vector de universo Φ^λ, que, en el sistema de coordenadas S_0 y en el punto P_0, admite las componentes:

$$\Phi^i = f^i; \qquad \Phi^4 = 0,$$

y que, por consiguiente, es ortogonal al vector velocidad unitario:

$$\Phi^\lambda u_\lambda = 0. \qquad [7\text{-}56]$$

Vamos a probar que, con estas notaciones, las ecuaciones [7-54] se pueden escribir en forma tensorial, válida en un sistema de coordenadas curvilíneas arbitrarias:

$$\nabla_\mu(\rho c^2 u^\lambda u^\mu + T^{\lambda\mu}) = \Phi^\lambda. \qquad [7\text{-}57]$$

En efecto: en el sistema de coordenadas de Galileo S_0 y en el punto P_0, las ecuaciones [7-57], si tenemos en cuenta [7-50 y [7-51], se reducen a

$$c^2\rho\partial_4 u^i + \partial_k t^{ik} + \partial_4 T^{i4} = f^i \qquad (\lambda = i), \qquad [7\text{-}58]$$

$$c^2\partial_4\rho + c^2\rho\partial_k u^k + \partial_k T^{4k} + \partial_4 T^{44} = 0 \qquad (\lambda = 4). \qquad [7\text{-}59]$$

Es fácil ahora calcular los términos $\partial_\lambda T^{4\mu}$ que intervienen en [7-58] y [7-59]. Se tiene primero en P_0:

$$\partial_\lambda T^{4\mu} = \partial_\lambda(u_4 T^{4\mu}).$$

y, en virtud de la ecuación [7-55],

$$\partial_\lambda(u_4 T^{4\mu}) = -\partial_\lambda(u_l T^{l\mu}) = -\partial_\lambda u_l T^{l\mu}$$

Se deduce así la relación

$$\partial_\lambda T^{4\mu} = -\partial_\lambda u_l T^{l\mu}.$$

Llevando los valores de $\partial_\lambda T^{4\mu}$ a las ecuaciones [7-58] y [7-59], se tiene:

$$\left\{\begin{array}{l} c^2\rho\partial_4 u^i + \partial_k t^{ik} - \partial_4 u_l t^{li} = f^i \\ c^2\partial_4\rho + c^2\rho\partial_k u^k - \partial_k u_l t^{kl} = 0 \end{array}\right. \qquad [7\text{-}60]$$

y sustituyendo las componentes u^i por las v^i según [7-51], se obtienen de nuevo las ecuaciones [7-54]. Las relaciones [7-57] son las ecuaciones fundamentales de la dinámica relativista de los medios continuos. El tensor de universo $T^{\lambda\mu}$ se llama también *tensor de presiones o de tensiones*.

7-15. El tensor de impulsión-energía.—La forma de las ecuaciones fundamentales [7-57] nos conduce a introducir el tensor simétrico

$$P^{\lambda\mu} = \rho u^\lambda u^\mu + \frac{1}{c^2}T^{\lambda\mu}, \qquad [7\text{-}61]$$

de suerte que las ecuaciones [7-57] se escriben:

$$\nabla_\mu P^{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2}\Phi^\lambda. \qquad [7\text{-}62]$$

El tensor $P^{\lambda\mu}$ recibe el nombre de *tensor de impulsión-energía* del medio continuo considerado. Se observará que, en virtud de [7-55], resulta:

$$P^{\lambda\mu}u_\mu = \rho u^\lambda.$$

Cabe traducir este resultado diciendo que la transformación lineal definida por el tensor de impulsión-energía admite el vector velocidad unitario u^λ como vector propio, siendo ρ el valor propio correspondiente.

Busquemos la forma del tensor de impulsión-energía en el caso en que el medio continuo considerado sea un fluido perfecto. Utilizando las notaciones de [7-35], el tensor $T^{\lambda\mu}$ admite, en el sistema de coordenadas de Galileo S_0 y en el punto P_0, las componentes:

$$T^{ik} = t^{ik} = -pm^{ik}; \qquad T^{i4} = T^{4i} = T^{44} = 0,$$

lo que en coordenadas arbitrarias se escribe en la forma tensorial:

$$T^{\lambda\mu} = -p(g^{\lambda\mu} - u^\lambda u^\mu);$$

de donde se deduce:

$$P^{\lambda\mu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^\lambda u^\mu - \frac{p}{c^2}g^{\lambda\mu}. \qquad [7\text{-}63]$$

LAS ECUACIONES DE MAXWELL-LORENTZ

7-16. El tensor campo electromagnético.—La teoría de Maxwell para el vacío y la teoría de los electrones de Maxwell-Lorentz hacen intervenir un campo electromagnético variable con el tiempo y definido por un vector de espacio campo eléctrico $\vec{E}$ y un vector de espacio campo magnético $\vec{H}$,

siendo adecuada esta representación vectorial únicamente para el estudio de las transformaciones consistentes en un desplazamiento puramente espacial y un cambio de origen para el tiempo. El campo electromagnético así definido está regido por las célebres ecuaciones fundamentales de la electrodinámica, llamadas de Maxwell-Lorentz. Nos proponemos demostrar que estas ecuaciones se expresan de manera particularmente sencilla con ayuda de tensores definidos sobre el espacio-tiempo V_4.

Estas representaciones tensoriales, independientes del sistema de referencia adoptado en la variedad espacio-tiempo, han conducido históricamente a una mejor comprensión de los fenómenos electrodinámicos de los cuerpos en movimiento.

Supongámonos situados en un sistema dado de coordenadas reducidas de Galileo (x^1, x^2, x^3, x^4), al cual corresponde en el espacio un sistema de ejes rectangulares de Galileo $Oxyz$. Respecto a este sistema, es sabido que los campos eléctrico y magnético se pueden definir, mediante un potencial-vector de espacio $\vec{A}$ y un potencial escalar de espacio Φ, por las relaciones:

$$\begin{cases} \vec{H} = \text{rot.}\, \vec{A} \\ \vec{E} = -\,\text{grad.}\, \Phi - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \qquad [7\text{-}64]$$

Designemos por A_x, A_y, A_z las componentes

de $\vec{A}$ sobre los ejes $Oxyz$, y consideremos el vector de universo $\vec{\varphi}$ que admite, en el sistema dado de coordenadas reducidas de Galileo, las cuatro componentes contravariantes:

$$\varphi^1 = -A_x; \quad \varphi^2 = -A_y; \quad \varphi^3 = -A_z; \quad \varphi^4 = -\Phi. \qquad [7\text{-}65]$$

y, por consiguiente, las cuatro componentes covariantes:

$$\varphi_1 = A_x; \quad \varphi_2 = A_y; \quad \varphi_3 = A_z; \quad \varphi_4 = -\Phi. \qquad [7\text{-}66]$$

Las fórmulas [7-64] se escriben en tal caso en la forma siguiente:

$$\begin{cases} H_x = \partial_2\varphi_3 - \partial_3\varphi_2 \\ H_y = \partial_3\varphi_1 - \partial_1\varphi_3 \\ H_z = \partial_1\varphi_2 - \partial_2\varphi_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = \partial_1\varphi_4 - \partial_4\varphi_1 \\ E_y = \partial_2\varphi_4 - \partial_4\varphi_2 \\ E_z = \partial_3\varphi_4 - \partial_4\varphi_3 \end{cases}$$

Lo que dicho de otra manera significa que las seis componentes de los vectores de espacio $\vec{H}$ y $\vec{E}$ están dadas por las seis componentes covariantes estrictas del tensor antisimétrico de universo,

$$F_{\lambda\mu} = \partial_\lambda\varphi_\mu - \partial_\mu\varphi_\lambda. \qquad [7\text{-}67]$$

En coordenadas reducidas de Galileo, se tiene explícitamente:

$$\begin{cases} H_x = F_{23} \\ H_y = F_{31} \\ H_z = F_{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = F_{14} \\ E_y = F_{24} \\ E_z = F_{34}. \end{cases} \qquad [7\text{-}68]$$

También es posible expresar las componentes de los vectores $\vec{H}$ y $\vec{E}$ por medio de las componentes contravariantes estrictas del tensor $F_{\lambda\mu}$, según las fórmulas:

$$\begin{cases} H_x = F^{23} \\ H_y = F^{31} \\ H_z = F^{12} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x = -F^{14} \\ E_y = -F^{24} \\ E_z = -F^{34} \end{cases} \qquad [7\text{-}69]$$

Así, en el espacio-tiempo, el campo electromagnético queda definido por un tensor antisimétrico de dos índices $F_{\lambda\mu}$, el cual se denomina *tensor campo electromagnético*. El vector de universo φ_λ, del cual $F_{\lambda\mu}$ es el *rotacional*, se llama *potencial-vector de universo*. La introducción del tensor campo electromagnético, definido por [7-67], pone bien de manifiesto la profunda unidad del campo electromagnético, y destruye la anterior independencia aparente de los dos campos eléctrico y magnético. En virtud de la ley de transformación tensorial, previa una transformación del grupo de Lorentz, las componentes del nuevo vector campo eléctrico, p. ej., dependen simultáneamente de las componentes del campo eléctrico y del campo magnético en el sistema de referencia de Galileo inicial.

Consideremos, p. ej., dos sistemas de coordenadas de Galileo (x, y, z, t) y (x', y', z', t'), ligados por una transformación especial de Lorentz. De las ecuaciones [7-15], que definen esta transformación, y de las [7-69], resulta que las componentes E_x, E_y, E_z del campo eléctrico y H_x, H_y, H_z del campo

magnético en el segundo sistema están dadas por las fórmulas:

$$\begin{cases} H_x' = H_x \\ H_y' = \dfrac{H_y + \beta E_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ H_z' = \dfrac{H_z - \beta E_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad \begin{cases} E_x' = E_x \\ E_y' = \dfrac{E_y - \beta H_z}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ E_z' = \dfrac{E_z + \beta H_y}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases} \qquad [7\text{-}70]$$

Estas leyes de transformación están estrechamente ligadas a las leyes de Faraday y de Ampère.

La fórmula [7-67], que constituye la traducción tensorial en el espacio-tiempo de las fórmulas [7-64], permite así definir de manera sencilla el campo electromagnético respecto a no importa qué sistema de coordenadas rectilíneas o curvilíneas del espacio-tiempo.

Se observará que el potencial-vector de universo, φ_λ, no está determinado de manera única por el conocimiento del campo electromagnético. A un potencial vector que satisfaga a [7-67] se le puede adjuntar un campo de gradiente arbitrario y reemplazar entonces φ_λ por

$$\varphi_\lambda^* = \varphi_\lambda + \partial_\lambda \Psi, \qquad [7\text{-}71]$$

sin modificar el segundo miembro de [7-67]. La adición de tal gradiente al potencial-vector ha recibido el nombre, dado por Hermann Weyl, de *cambio de medida*. Las cantidades tales como el campo electromagnético, que tienen la propiedad de no modificarse por un cambio de medida, se dice que tienen *invariancia de medida*.

7-17. El tensor adjunto del campo electromagnético.—Hemos visto en la sección 3-23 que a todo tensor antisimétrico se le puede asociar de manera intrínseca otro tensor antisimétrico que se llama su *adjunto*. Al tensor campo electromagnético $F_{\lambda\mu}$ le corresponderá en el espacio-tiempo un tensor antisimétrico adjunto de orden $4 - 2 = 2$, dado por la fórmula

$$F'^{\nu\rho} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\mu\nu\rho}F_{\lambda\mu}, \qquad [7\text{-}72]$$

válida en coordenadas cualesquiera.

Supongamos el espacio-tiempo referido a coordenadas reducidas de Galileo. Se tiene entonces $g = -1$ y

$$\eta^{\lambda\mu\nu\rho} = \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho},$$

en donde $\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}$ designa el indicador clásico de permutación. Se obtiene así la interpretación física de las componentes del tensor adjunto en coordenadas de Galileo:

$$\begin{cases} F'^{14} = F_{23} = H_x \\ F'^{24} = F_{31} = H_y \\ F'^{34} = F_{12} = H_z \end{cases} \qquad \begin{cases} F'^{23} = F_{14} = E_x \\ F'^{31} = F_{24} = E_y \\ F'^{12} = F_{34} = E_z \end{cases} \qquad [7\text{-}73]$$

El tensor adjunto $F'^{\lambda\mu}$ nos será también útil para la representación del campo electromagnético.

7-18. El vector corriente eléctrica.—En las ecuaciones de Maxwell-Lorentz de la teoría de los electrones, escritas en un sistema de Galileo, intervienen la densidad de carga μ y el producto de esta

densidad de carga por el vector velocidad de espacio $\vec{v}$ de la carga, o sea, $\mu\vec{v}$. Consideremos en particular un sistema de Galileo S_0 respecto al cual la carga esté en reposo, y sea μ_0 la densidad de carga correspondiente, la cual define evidentemente un escalar de universo. Dicha densidad de carga está ligada a la cantidad de electricidad *de*, que ocupa el volumen elemental dV_0, por la relación

$$de = \mu_0 dV_0.$$

Esta cantidad de electricidad es a su vez un invariante de universo. Así, p. ej., la carga total de un electrón es la misma respecto a todos los sistemas de Galileo, de tal suerte que en cualquiera de ellos, S, se tiene también:

$$de = \mu dV,$$

en donde dV designa la medida del volumen elemental homólogo de dV_0. Ahora bien: se deduce inmediatamente de la expresión [7-14] de la transformación de Lorentz que, si S_0 se mueve respecto a S con velocidad $\vec{v}$, la medida dV del volumen elemental en S está ligada a dV_0 por la relación

$$dV = \sqrt{1-\beta^2}\,dV_0,$$

de donde resulta:

$$\mu\sqrt{1-\beta^2}\,dV_0 = \mu_0 dV_0;$$

por consiguiente, la expresión de la densidad de carga μ, a partir de la densidad de carga en reposo μ_0, será:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}74]$$

Visto esto, se llama *vector corriente eléctrica* al vector de universo J definido por la fórmula

$$J^\lambda = \mu_0 c u^\lambda, \qquad [7\text{-}75]$$

en donde u^λ designa el vector velocidad unitario de la carga.

Intentemos calcular las componentes del vector corriente J en un sistema cualquiera de coordenadas de Galileo reducidas. Sustituyendo las u^λ por sus valores dados por [7-31], se tiene:

$$J^i = \frac{\mu_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad J^4 = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

o sea, según [7-74],

$$J^i = \mu v^i; \qquad J^4 = \mu c. \qquad [7\text{-}76]$$

7-19. El primer grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz.—Situémonos ahora en un sistema de coordenadas reducidas de Galileo (x) y sea $Oxyz$ el sistema asociado de ejes rectangulares de Galileo. Se sabe que las ecuaciones de Maxwell-Lorentz

densidad de carga por el vector velocidad de espacio $\vec{v}$ de la carga, o sea, $\mu\vec{v}$. Consideremos en particular un sistema de Galileo S_0 respecto al cual la carga esté en reposo, y sea μ_0 la densidad de carga correspondiente, la cual define evidentemente un escalar de universo. Dicha densidad de carga está ligada a la cantidad de electricidad de, que ocupa el volumen elemental dV_0, por la relación

$$de = \mu_0 dV_0.$$

Esta cantidad de electricidad es a su vez un invariante de universo. Así, p. ej., la carga total de un electrón es la misma respecto a todos los sistemas de Galileo, de tal suerte que en cualquiera de ellos, S, se tiene también:

$$de = \mu dV,$$

en donde dV designa la medida del volumen elemental homólogo de dV_0. Ahora bien: se deduce inmediatamente de la expresión [7-14] de la transformación de Lorentz que, si S_0 se mueve respecto a S con velocidad $\vec{v}$, la medida dV del volumen elemental en S está ligada a dV_0 por la relación

$$dV = \sqrt{1-\beta^2}dV_0.$$

de donde resulta:

$$\mu\sqrt{1-\beta^2}dV_0 = \mu_0 dV_0;$$

por consiguiente, la expresión de la densidad de carga μ, a partir de la densidad de carga en reposo μ_0, será:

$$\mu = \frac{\mu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad [7\text{-}74]$$

Visto esto, se llama *vector corriente eléctrica* al vector de universo J definido por la fórmula

$$J^\lambda = \mu_0 c u^\lambda. \qquad [7\text{-}75]$$

en donde u^λ designa el vector velocidad unitario de la carga.

Intentemos calcular las componentes del vector corriente J en un sistema cualquiera de coordenadas de Galileo reducidas. Sustituyendo las u^λ por sus valores dados por [7-31], se tiene:

$$J^i = \frac{\mu_0 v^i}{\sqrt{1-\beta^2}}; \qquad J^4 = \frac{\mu_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}};$$

o sea, según [7-74],

$$J^i = \mu v^i; \qquad J^4 = \mu c. \qquad [7\text{-}76]$$

7-19. El primer grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz.—Situémonos ahora en un sistema de coordenadas reducidas de Galileo (x) y sea $Oxyz$ el sistema asociado de ejes rectangulares de Galileo. Se sabe que las ecuaciones de Maxwell-Lorentz

pueden dividirse en dos grupos, de los cuales el primero se escribe en notación vectorial de espacio:

$$\text{rot. } \vec{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 4\pi \frac{\mu \vec{v}}{c}; \qquad [7\text{-}77]$$

$$\text{div. } \vec{E} = 4\pi\mu. \qquad [7\text{-}78]$$

Proyectemos la ecuación [7-77] sobre el eje Ox del sistema de ejes de Galileo considerado, y se tiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t} = 4\pi \frac{\mu v^1}{c}$$

En virtud de [7-69] y [7-76], esta última ecuación se escribe:

$$\partial_2 F^{12} + \partial_3 F^{13} + \partial_4 F^{14} = \frac{4\pi}{c} J^1,$$

de donde se deduce que la ecuación vectorial [7-77] se puede traducir en coordenadas de Galileo reducidas por las relaciones

$$\partial_\mu F^{1\mu} = \frac{4\pi}{c} J^1. \qquad [7\text{-}79]$$

De la misma manera, la ecuación [7-78] adopta la forma explícita

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\mu;$$

o sea, en virtud de [7-69] y [7-76],

$$\partial_1 F^{41} + \partial_2 F^{42} + \partial_3 F^{43} = \frac{4\pi}{c} J^4,$$

de donde resulta que el primer grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz puede, en coordenadas de Galileo reducidas, escribirse en la forma simplificada:

$$\partial_\mu F^{\lambda\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\lambda; \qquad [7\text{-}80]$$

o sea, utilizando coordenadas rectilíneas,

$$\nabla_\mu F^{\lambda\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\lambda. \qquad [7\text{-}81]$$

Esta forma tensorial de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz [7-77] y [7-78] es válida cualquiera que sea el sistema de coordenadas rectilíneas o curvilíneas adoptado para la variedad espacio-tiempo.

7-20. El segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz.—En coordenadas de Galileo, y con notaciones vectoriales de espacio, el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz se escribe:

$$\text{rot. } \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0; \qquad [7\text{-}82]$$

$$\text{div. } \vec{H} = 0. \qquad [7\text{-}83]$$

Proyectemos la ecuación [7-82] sobre el eje Ox y se tiene:

$$\frac{\partial E_z}{\partial_y} - \frac{\partial E_y}{\partial_z} + \frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0;$$

o sea, en virtud de [7-73],

$$\partial_2 F'^{12} + \partial_3 F'^{13} + \partial_4 F'^{14} = 0.$$

Así, la ecuación vectorial [7-82] se traduce en coordenadas reducidas de Galileo mediante las relaciones:

$$\partial_\rho F'^{i\rho} = 0. \qquad [7\text{-}84]$$

Del mismo modo, la ecuación [7-83] se puede escribir:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0;$$

esto es, si seguimos teniendo en cuenta [7-73],

$$\partial_1 F'^{41} + \partial_2 F'^{42} + \partial_3 F'^{43} = 0,$$

de donde resulta que el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz se escribe en coordenadas reducidas de Galileo:

$$\partial_\mu F'^{\lambda\mu} = 0. \qquad [7\text{-}85]$$

o bien, si las coordenadas utilizadas son rectilíneas,

$$\nabla_\mu F'^{\lambda\mu} = 0. \qquad [7\text{-}86]$$

Esta forma tensorial es también válida cualquiera que sea el sistema de coordenadas utilizado. Se observará la simetría de los primeros miembros de [7-81] y [7-86].

Se sabe que las ecuaciones [7-82] y [7-83] son simples consecuencias de las ecuaciones [7-64]; es decir, traducen la existencia para $\vec{H}$ y $\vec{E}$ del potencial-vector de espacio $\vec{A}$ y del potencial escalar de espacio Φ. Sobre la variedad espacio-tiempo este resultado se presenta de manera particularmente sugestiva. Las ecuaciones [7-86] se pueden escribir en la forma:

$$\nabla_\mu(\eta^{\lambda\mu\nu\rho} F_{\nu\rho}) = 0. \qquad [7\text{-}87]$$

Ahora bien, se comprueba fácilmente que, en virtud de [4-52], se tiene:

$$\nabla_\mu \eta^{\lambda\mu\nu\rho} = 0.$$

Así, las ecuaciones [7-87] adoptan la forma:

$$\eta^{\lambda\mu\nu\rho} \nabla_\mu F_{\nu\rho} = 0;$$

o sea, multiplicando por $\sqrt{g}$ el primer miembro,

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} \nabla_\mu F_{\nu\rho} = 0. \qquad [7\text{-}88]$$

Como la derivada covariante $\nabla_\mu F_{\nu\rho}$ se escribe:

$$\nabla_\mu F_{\nu\rho} = \partial_\mu F_{\nu\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu} F_{\tau\rho} - \Gamma_{\mu}{}^{\tau}{}_{\rho} F_{\nu\tau}$$

y, por razón de simetría,

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\Gamma_{\mu}{}^{\tau}{}_{\nu}=0\,; \qquad \varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\Gamma_{\rho}{}^{\tau}{}_{\rho}=0,$$

resulta de ello que, en un sistema arbitrario de coordenadas, las ecuaciones de Maxwell [7-86] se escriben:

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho}\,\partial_{\mu}F_{\nu\rho}=0. \qquad [7\text{-}89]$$

Estas ecuaciones, que en forma explícita se reducen a

$$\partial_{\mu}F_{\nu\rho}+\partial_{\nu}F_{\rho\mu}+\partial_{\rho}F_{\mu\nu}=0,$$

en donde μ, ν y ρ designan tres índices distintos, son las condiciones necesarias y suficientes para que exista un vector de universo φ_{λ} tal que $F_{\lambda\mu}$ sea su tensor rotacional.

7-21. La conservación de la electricidad.—Formando la divergencia del primer miembro de [7-77] y derivando la ecuación [7-78] respecto al tiempo, se obtiene, en notaciones vectoriales de espacio, la ley de conservación para la electricidad:

$$\frac{\partial\mu}{\partial t}+\text{div.}\,(\overrightarrow{\mu v})=0. \qquad [7\text{-}90]$$

Es fácil deducir esta ley en forma tensorial general mediante cálculo directo. Consideremos primero coordenadas reducidas de Galileo (x^{λ}). El primer miembro de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz se escribe, según [7-80],

$$\partial_{\mu}F^{\lambda\mu}=\frac{4\pi}{c}J^{\lambda} \qquad [7\text{-}91]$$

Derivemos los dos miembros de esta ecuación con relación a x^{λ} y sumemos respecto al índice λ; resulta así:

$$\partial_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}=\frac{4\pi}{c}\partial_{\lambda}J^{\lambda}.$$

Pero utilizando la antisimetría de $F^{\lambda\mu}$ y cambiando el nombre a los índices de sumación λ y μ, se obtiene:

$$\partial_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}=-\partial_{\lambda\mu}F^{\mu\lambda}=-\partial_{\mu\lambda}F^{\mu\lambda}=-\partial_{\lambda\mu}F^{\lambda\mu}=0,$$

de donde se deduce que, en coordenadas reducidas de Galileo,

$$\partial_{\lambda}J_{\lambda}=0, \qquad [7\text{-}92]$$

ecuación que es estrictamente equivalente a la [7-90]. Si el espacio-tiempo se halla referido a un sistema de coordenadas curvilíneas arbitrarias, la ecuación [7-92] admite la siguiente expresión:

$$\nabla_{\lambda}J^{\lambda}=0. \qquad [7\text{-}93]$$

que traduce, en forma tensorial general, la ley de conservación de la electricidad.

7-22. La densidad de fuerza de Lorentz.—Considerando nuevamente coordenadas de Galileo, sea $\vec{K}$ la densidad de fuerza dada por la teoría de Maxwell-Lorentz; es decir, la fuerza que se ejerce sobre la cantidad de electricidad contenida en la unidad

de volumen, la cual está dada por la conocida fórmula:

$$\vec{K} = \mu\vec{E} + \frac{\mu\vec{v}}{c} \wedge \vec{H}, \qquad [7\text{-}94]$$

en notaciones vectoriales de espacio.

Proyectemos la ecuación anterior sobre el eje Ox del sistema rectangular de ejes de Galileo; se obtiene así:

$$K_x = \mu E_x + \frac{\mu v^2}{c} H_z - \frac{\mu v^3}{c} H_y;$$

o sea, introduciendo las componentes contravariantes del tensor campo electromagnético y las componentes covariantes del vector corriente,

$$K_x = \frac{1}{c}\,[J_4F^{41} + J_3F^{31} - J_2F^{12}] = \frac{1}{c}\,J_\mu F^{\mu 1}.$$

De aquí se deduce que las componentes K^i del vector de espacio $\vec{K}$ están dadas por la fórmula

$$K^i = \frac{1}{c}\,J_\mu F^{\mu i}.$$

Esto sugiere completar las componentes K^1, K^2, K^3 con una cuarta componente K^4, e introducir el vector de universo, cuyas componentes contravariantes están dadas por

$$K^\lambda = \frac{1}{c}\,J_\mu F^{\mu\lambda}; \qquad [7\text{-}95]$$

esta forma tensorial es válida en un sistema de coordenadas arbitrario.

Interpretemos la cuarta componente K^4 en coordenadas reducidas de Galileo; se tiene:

$$K^4 = \frac{1}{c}\,[J_1F^{14} + J_2F^{24} + J_3F^{34}],$$

o sea, con notaciones vectoriales de espacio y teniendo en cuenta [7-94],

$$K^4 = \frac{1}{c}\,\mu\vec{v}\cdot\vec{E} = \frac{1}{c}\,\vec{K}\cdot\vec{v}.$$

Salvo el factor $\frac{1}{c}$, K^4 representa, por tanto, el trabajo por unidad de tiempo y de volumen, correspondiente a la densidad de fuerza $\vec{K}$.

El vector de universo definido por [7-95] se llama *vector densidad de fuerza de Lorentz*. Se observará que este vector es ortogonal al vector de corriente J^λ. Se tiene, en efecto,

$$K^\lambda J_\lambda = \frac{1}{c}\,F^{\lambda\mu}J_\lambda J_\mu = 0,$$

en razón de la antisimetría de $F^{\lambda\mu}$.

7-23. El tensor de impulsión-energía del campo electromagnético.—Consideremos un medio continuo constituido por la reunión de un gran número de partículas cargadas, p. ej., electrones. Si este número es suficientemente grande, la contribución

de cada partícula al campo total será despreciable. Podemos suponer conocido el campo electromagnético total que actúa sobre las partículas; lo designaremos por $F^{\lambda\mu}$. El medio continuo en cuestión se encuentra así sometido a la densidad de fuerza de Lorentz [7-95].

Resulta entonces que las ecuaciones fundamentales del movimiento del medio continuo considerado son las [7-62], en donde se ha hecho $\Phi^{\lambda} = K$; o sea,

$$\nabla_{\mu} P^{\lambda\mu} = \frac{1}{c^2} K^{\lambda}. \qquad [7\text{-}96]$$

Es posible escribir el segundo miembro de las ecuaciones [7-96] en una forma análoga a la del primer miembro. Sustituyendo en [7-95] el valor del vector corriente J^{μ} dado por [7-81], se tiene:

$$K_{\lambda} = -\frac{1}{4\pi} F_{\lambda\mu} \nabla_{\rho} F^{\mu\rho};$$

o sea, integrando por partes el segundo miembro,

$$4\pi K_{\lambda} = -\nabla_{\rho}(F_{\lambda\mu} F^{\mu\rho}) + F^{\mu\rho} \nabla_{\rho} F_{\lambda\mu}.$$

Para calcular el último término del segundo miembro, cambiemos los índices de sumación μ y ρ. Se obtiene así, habida cuenta de la antisimetría del tensor campo electromagnético,

$$F^{\mu\rho} \nabla_{\rho} F_{\lambda\mu} = \frac{1}{2} (F^{\mu\rho} \nabla_{\rho} F_{\lambda\mu} + F^{\rho\mu} \nabla_{\mu} F_{\lambda\rho}) = \frac{1}{2} F^{\mu\rho} (\nabla_{\rho} F_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu} F_{\rho\lambda}).$$

Pero, de acuerdo con el segundo grupo de las ecuaciones de Maxwell, escritas en la forma [7-88], y cualesquiera que sean los índices λ, μ y ρ,

$$\nabla_{\rho} F_{\lambda\mu} + \nabla_{\mu} F_{\rho\lambda} + \nabla_{\lambda} F_{\mu\rho} = 0,$$

de donde resulta:

$$F^{\mu\rho} \nabla_{\rho} F_{\lambda\mu} = -\frac{1}{2} F^{\mu\rho} \nabla_{\lambda} F_{\mu\rho} = -\frac{1}{4} \nabla_{\lambda}(F^{\mu\rho} F_{\mu\rho}).$$

De aquí se deduce para la densidad de fuerza de Lorentz la expresión:

$$-4\pi K_{\lambda} = \nabla_{\rho} (F_{\lambda\mu} F^{\mu\rho}) + \frac{1}{4} \nabla_{\lambda} (F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta});$$

o sea, cambiando el nombre de los índices,

$$-4\pi K_{\lambda} = \nabla_{\mu}\left(-F_{\mu\alpha} F^{\lambda\mu} + \frac{1}{4} \delta_{\lambda}^{\mu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right).$$

Esto nos lleva a introducir el tensor simétrico

$$M_{\lambda\mu} = \frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{4} g_{\lambda\mu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} - F_{\lambda\alpha} F_{\mu}{}^{\alpha}\right). \qquad [7\text{-}97]$$

y las ecuaciones [7-96] se escriben en la forma más reducida:

$$\nabla_{\mu}(P^{\lambda\mu} + M^{\lambda\mu}) = 0. \qquad [7\text{-}98]$$

Ya que el segundo miembro es nulo, el tensor $M^{\lambda\mu}$ aparece así como un tensor que conviene sumar al $P^{\lambda\mu}$ para obtener el tensor de impulsión-energía

total del medio continuo considerado, teniendo en cuenta las acciones electromagnéticas. El tensor M_{μ} definido por [7-97] se denomina *tensor de impulsión-energía del campo electromagnético.*

En coordenadas reducidas de Galileo, sus componentes se construyen mediante las componentes del tensor de espacio relativo a las tensiones del campo electromagnético, las cuales fueron estudiadas por Maxwell, junto con las componentes del vector de Poynting y de la energía $E^2 + H^2$ del campo electromagnético por unidad de volumen.

CAPITULO VIII

ELEMENTOS DE LA TEORIA RELATIVISTA DE LA GRAVITACION

8-1. La gravitación.—La gravitación consiste esencialmente en el hecho experimental siguiente: los movimientos de las masas materiales en el universo influyen los unos sobre los otros. De esta interdependencia de los movimientos de las masas materiales, Newton dio una descripción sencilla y precisa mediante sus fuerzas atractivas, dentro del cuadro de la mecánica clásica. Pero esta descripción no está de acuerdo con las exigencias relativistas tal como las acabamos de exponer.

Llamamos *fenómeno elemental de gravitación* a la ley de movimiento de una masa de prueba infinitamente pequeña, colocada en el universo y sustraída a toda acción eléctrica o de contacto; es un hecho experimental que si la masa de prueba no se halla muy alejada de toda masa material, su movimiento difiere profundamente del movimiento rectilíneo y uniforme previsto por el principio de inercia. Consideremos la variedad espacio-tiempo V_4 y supongámosla dotada de la métrica euclidiana [7-25]. Si concebimos el *fenómeno elemental ligado de manera invariante con ds^2 y estrictamente determinado por este*, puesto que el ds^2 de Galileo tiene coeficientes constantes, el fenómeno elemental deberá ser, relativamente al sistema de

referencia de Galileo, idéntico en absoluto a sí mismo. Cuando la masa de prueba está alejada de cualquier otra masa satisface entonces al principio de inercia; dicha masa será siempre la misma, y se podrá considerar como aislada. Por consiguiente, en la hipótesis enunciada, un ds^2 euclidiano solo es susceptible de representar un universo desprovisto de materia; es decir, un universo sin gravitación.

Para representar universos con gravitación, Einstein tuvo que recurrir a métricas más generales que la métrica euclidiana de Minkowski [7-25], introducida para la relatividad restringida, y hubo de *considerar la variedad espacio-tiempo correspondiente como un espacio de Riemann* definido por esta métrica y que determina completamente el fenómeno elemental.

¿Cómo se efectúa esta determinación? Hemos visto en la sección 7-9 que en el universo sin gravitación, las geodésicas del elemento lineal, para las cuales ds^2 es positivo, definen los movimientos de una masa de prueba, mientras que aquellas para las cuales $ds^2 = 0$ son los rayos luminosos. Así se llega a poder considerar extendido este principio, que es de naturaleza invariante, a los ds^2 más generales introducidos por Einstein y a enunciar el siguiente principio.

PRINCIPIO DE LAS GEODÉSICAS.—*Cerca o lejos de las masas o de las distribuciones energéticas, las geodésicas del elemento lineal de V_4 definen los movimientos de una masa de prueba y la propagación de la luz.*

8-2. La métrica de la relatividad generalizada.— En la concepción de Einstein, un universo se encuentra, pues, representado por un espacio de Riemann V_4 de cuatro dimensiones, definido cuando se da una métrica:

$$ds^2 = g_{\lambda\mu} dy^\lambda dy^\mu, \qquad 8\text{-}1$$

con signatura $+ - - -$ o, como corrientemente se dice, del *tipo hiperbólico normal*. La expresión ds se llama *intervalo elemental* en la variedad espacio-tiempo. La interpretación física de las coordenadas y de los elementos ligados a este ds^2 se efectuará mediante métricas euclidianas tangentes u osculatrices en un punto, las cuales podrán reducirse, p. ej., a la forma de Minkowski.

En particular, la ecuación $ds^2 = 0$ define en cada punto de la variedad un *hipercono elemental* real, lugar de las direcciones espacio-temporales (dy^1, dy^2, dy^3, dy^4) en las cuales se propaga la luz a partir de este punto.

Las $g_{\lambda\mu}$ que corresponden a un sistema de coordenadas determinado son funciones de las coordenadas y^λ y definen completamente, respecto a este sistema, el fenómeno elemental de gravitación por el principio de las geodésicas. Por ello, se les da el nombre de *potenciales de gravitación* relativos a este sistema. Los potenciales de gravitación $g_{\lambda\mu}$ alcanzan el número de diez, y sus derivadas, que intervienen mediante los símbolos de Christoffel en las ecuaciones de las geodésicas, definen el campo de gravitación en el sistema de coordenadas considerado.

El problema esencial de la teoría relativista de la gravitación consiste en la determinación efectiva de los potenciales de gravitación correspondientes a los diferentes estados de la materia en movimiento.

8-3. Las ecuaciones de Einstein. Einstein llegó a las ecuaciones en derivadas parciales que limitan la generalidad de los potenciales de gravitación mediante dos condiciones esenciales. Por una parte, estas ecuaciones deben generalizar las ecuaciones de Laplace y Poisson, que determinan localmente el potencial newtoniano, y, por otra, deberán expresarse en forma de relaciones entre tensores en el espacio-tiempo V_4. Escribiremos dichas ecuaciones en la forma:

$$S_{\nu\mu} = \chi Q_{\nu\mu} \qquad [8\text{-}2]$$

en donde los dos miembros son tensores simétricos, mientras que χ designa un factor constante ligado a la constante de atracción universal. El tensor $Q_{\nu\mu}$ de significado puramente mecánico, describe en cada punto el estado de la distribución energética (caso *interior*), o bien, en las regiones no barridas por la energía, es idénticamente nulo (caso *exterior*). De esa manera generaliza el segundo miembro de la ecuación de Poisson.

Para tener en cuenta todas las formas de la energía, hemos de identificar $Q_{\nu\mu}$ con el tensor de impulsión-energía total de la distribución material o energética considerada, tal como lo hemos estudiado en las secciones 7-15 y 7-23. En la hipótesis de un medio continuo con acciones electromagnéticas, se concluye que tendremos que hacer:

$$Q_{\nu\mu} = P_{\nu\mu} + M_{\nu\mu} \qquad [8\text{-}3]$$

El estudio (hecho en relatividad restringida) del intercambio de impulsión y de energía a través del volumen del medio considerado continuo nos condujo a las ecuaciones de conservación [7-98], que ahora se escriben:

$$\nabla_\mu Q^{\nu\mu} = 0. \qquad [8\text{-}4]$$

Introduciendo una métrica euclidiana osculatriz en un punto de V_4, el estudio precedente hecho en relatividad restringida resulta válido localmente para el espacio-tiempo de la relatividad general, de suerte que el tensor $Q^{\nu\mu}$ continúa satisfaciendo las ecuaciones [8-4]. Traduciremos esto diciendo que el tensor $Q^{\nu\mu}$ es *conservativo*. Es conveniente observar la forma análoga de las ecuaciones [8-4] y de la ecuación [7-93] de conservación de la electricidad.

El tensor $S^{\nu\mu}$, introducido en el primer miembro de las ecuaciones [8-2], es de importancia puramente geométrica; es decir, sólo hace intervenir la métrica [8-1] introducida. *A priori*, las diez cantidades $S_{\nu\mu}$ no pueden ser independientes; en efecto, disponiendo de la parte arbitraria existente en el sistema de coordenadas (y^λ), es posible atribuir valores determinados a cuatro potenciales. Si las cantidades $S_{\nu\mu}$ fuesen totalmente independientes, los seis potenciales restantes deberían verificar diez condiciones independientes.

Ahora bien: siendo el tensor $Q_{\lambda\mu}$ necesariamente conservativo, también debe serlo el $S_{\lambda\mu}$, y este se encuentra, por consiguiente, obligado a satisfacer cuatro ecuaciones

$$\nabla_\mu S^{\lambda\mu} = 0. \qquad [8\text{-}5]$$

que ligan las diez funciones $S_{\lambda\mu}$.

Así, para determinar los potenciales de gravitación mediante ecuaciones que generalicen las ecuaciones de Laplace y Poisson, habremos de imponer al tensor $S_{\lambda\mu}$, de significado puramente geométrico, las dos condiciones siguientes:

1.ª *Las cantidades $S_{\lambda\mu}$ solo dependen de los potenciales de gravitación y de sus derivadas de los dos primeros órdenes, siendo lineales respecto a las derivadas de segundo orden.*

2.ª *El tensor $S_{\lambda\mu}$ satisface las ecuaciones de conservación:*

$$\nabla_\mu S^{\lambda\mu} = 0.$$

Según el estudio anterior (Secs. 5-15 y 5-16), conocemos ya un tensor que satisface las dos condiciones precedentes; es el tensor

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R,$$

siendo $R_{\lambda\mu}$ el tensor de Ricci del espacio riemanniano [8-1], y R, su curvatura riemanniana escalar. Por otra parte, Elie Cartan ha demostrado

que los únicos tensores que cumplen las dos condiciones enunciadas están dados por la fórmula:

$$S_{\lambda\mu} = h\left[R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k)\right]$$

en donde h y k designan dos constantes. Las correspondientes ecuaciones en derivadas parciales se escriben:

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu}(R + k) = \chi Q_{\lambda\mu},$$

suprimiendo el factor h, que es superfluo. Salvo en ciertos estudios cosmológicos muy especiales, solo se tienen en cuenta en teoría relativista de la gravitación ecuaciones en las que la constante k es nula, las cuales fueron dadas por primera vez por Einstein. Así, pues, las ecuaciones de Einstein para los potenciales de gravitación, en el caso interior, se escriben:

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = \chi Q_{\lambda\mu}, \qquad [8\text{-}6]$$

y, en el caso exterior,

$$R_{\lambda\mu} - \frac{1}{2} g_{\lambda\mu} R = 0 \qquad [8\text{-}7]$$

Por otra parte, estas últimas ecuaciones son equivalentes a

$$R_{\lambda\mu} = 0, \qquad [8\text{-}8]$$

como resulta inmediatamente por contracción.

8-4. El tensor de impulsión-energía.—El tensor de impulsión-energía $Q_{\lambda\mu}$, introducido en el segundo miembro de las ecuaciones de Einstein del caso interior, debe describir por completo la distribución material o energética en movimiento. Para el conocimiento perfecto de este tensor se precisará, en particular, una teoría perfecta de la constitución de la materia. Hemos de contentarnos, como en mecánica clásica, con una esquematización más o menos refinada, a la cual corresponderá un tensor $Q_{\lambda\mu}$ más o menos complejo. Este tensor contendrá diferentes términos, correspondientes a las diferentes clases de energía: energía ponderable o cinética, energía procedente de las tensiones, del campo electromagnético, etc. En presencia de materia, el término experimentalmente más importante es el correspondiente a la energía ponderable.

Se observará que, al no admitir el espacio de Riemann el grupo de movimientos de la geometría euclidiana, no será ya posible esquematizar en primera aproximación las masas materiales por medio de sólidos, conforme se hace en mecánica celeste clásica. Con ello estamos obligados a considerar modelos de carácter hidrodinámico, y esta es la razón por la que el estudio de los medios continuos desempeña papel tan importante en la teoría relativista de la gravitación.

Existen varias formas de tensores de impulsión-energía comúnmente utilizadas en la teoría relativista de la gravitación. Consideremos en primer lugar un medio continuo tal que las interacciones en el seno del mismo sean despreciables y que no

existan acciones electromagnéticas. La forma correspondiente del tensor de impulsión-energía será:

$$Q^{\lambda\mu} = \rho u^{\lambda} u^{\mu}, \qquad [8\text{-}9]$$

siendo ρ la densidad de la materia en reposo (es decir, relativamente a un sistema en reposo respecto a la materia), y u^{λ}, el vector velocidad unitario de la distribución material en el punto considerado. El término único del tensor [8-9] corresponde a la energía ponderable.

Si en el seno del medio existen interacciones definidas por un tensor de tensiones $T_{\lambda\mu}$, se tendrá:

$$Q^{\lambda\mu} = \rho u^{\lambda} u^{\mu} + \frac{1}{c^2} T^{\lambda\mu}. \qquad [8\text{-}10]$$

En particular, en el caso de un fluido perfecto, se tiene, de acuerdo con [7-63],

$$Q^{\lambda\mu} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) u^{\lambda} u^{\mu} - \frac{p}{c^2} g^{\lambda\mu}, \qquad [8\text{-}11]$$

en donde p designa la presión del fluido.

Las líneas de universo, tangentes en todo punto al vector velocidad unitario u^{λ}, se llaman *líneas de corriente* de la distribución material considerada.

Al campo electromagnético aislado, en ausencia de materia, corresponde el tensor de impulsión-energía definido por [7-97].

8-5. Las ecuaciones de conservación en el interior de la materia.—Los tensores $S_{\lambda\mu}$ y $Q_{\lambda\mu}$ son con-

servativos y, en el caso interior, se tienen las ecuaciones de conservación:

$$\nabla_\mu Q^{\mu\nu} = 0. \qquad [8\text{-}12]$$

Escribamos explícitamente las condiciones [8-12] en el caso en que el tensor de impulsión-energía esté dado por la fórmula [8-9]. Se obtiene:

$$\nabla_\mu(\rho u^\mu)u^\nu + \rho u^\mu \nabla_\mu u^\nu = 0. \qquad [8\text{-}13]$$

Pero, por ser unitario el vector u^λ, se tiene:

$$u_\lambda \nabla_\mu u^\lambda = 0.$$

De [8-13] resulta entonces por multiplicación contracta por u_λ:

$$\Delta_\mu(\rho u^\mu) = 0, \qquad [8\text{-}14]$$

y, por consiguiente,

$$u^\mu \nabla_\mu u = 0. \qquad [8\text{-}15]$$

El significado geométrico de estas ecuaciones es muy sencillo: [8-14] expresa que la divergencia del vector ρu^μ, velocidad material generalizada, es nula; por tanto, es la ecuación de continuidad de la materia. La ecuación [8-15] nos dice que las líneas de corriente son geodésicas del ds^2, resultado que se halla en íntima relación con el principio de las geodésicas. Resultados análogos, aunque más complejos, han sido indicados por Eisenhart y el autor en el caso de existir en el medio un tensor de tensiones internas.

Nos vemos constreñidos en el cuadro de esta obra a limitarnos a estas indicaciones relativamente elementales y recomendamos al lector para más detalles la consulta de los tratados especializados que se citan en la bibliografía.

BIBLIOGRAFIA

Se hace a continuación una breve selección de la abundante bibliografía dedicada al cálculo tensorial, a la geometría de Riemann y a la teoría de la relatividad, con el fin de que sirva de orientación al lector.

Sobre cálculo tensorial

1. Appell, P., y Thiry: *Traité de Mécanique rationnelle*, vol. V, 2.ª ed., Gauthier-Villars, 1933.
2. Brillouin, L.: *Les tenseurs en Mécanique et en Elasticité*, Masson, 1938.
3. Bureau, F.: *Calcul vectoriel et calcul tensoriel*, curso de la Universidad de Lieja, Lieja, 1945.
4. Cartan, E.: *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, 2.ª ed., Gauthier-Villars, 1946.—«La géométrie des espaces de Riemann», *Mém. des sc. math.*, Gauthier-Villars, 1926.
5. Eisenhart, L. P.: *Riemannian geometry*, Princeton University Press, 1926.
6. Levi-Civita, T.: *Der absolute Differentialkalkül*, Springer, 1928.
7. Schouten y Struik: *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, Noordhoff, 1935.
8. Schouten: *Riccikalkül*, 2.ª ed., Springer, 1954.

Sobre teoría de la relatividad

9. Becker, R.: *Théorie des électrons*, Alcan, 1938.
10. Chazy, J.: *La théorie de la relativité et la mécanique celeste*, Gauthier-Villars, 1930.
11. Darmois, G.: «Les équations de la gravitation einsteinienne», *Mém. des sc. math.*, Gauthier-Villars, 1927.
12. Eddington: *Relativitätstheorie in mathematischer Behandlung*, Berlín, 1925.
13. Einstein, A.: *Quatre conférences sur la théorie de la Relativité* (trad. de Solovine), Gauthier-Villars, 1925.
14. Lichnerowicz, A.: «Problèmes globaux en Mécanique relativiste», *Actual. sc. et ind.*, Hermann, 1939.
15. Weyl, H.: *Raum, Zeit, Materie*, 5.ª ed., Berlín, 1923.
16. Bergmann, P. G.: *Introduction to the theory of relativity*, Prentice-Hall, 1946.
17. Lichnerowicz, A.: *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, 1954.